

# ДИНАМИКА, ПРОЧНОСТЬ МАШИН, ПРИБОРОВ И АППАРАТУРЫ

DOI: 10.18698/0236-3941-2016-2-81-92

УДК 531.8:519.2

## СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕЙ, ЧАСТИЧНО ПОГРУЖЕННЫХ В ЖИДКОСТЬ

А.С. Гусев<sup>1</sup>, Ю.В. Григорьев<sup>1</sup>, С.А. Стародубцева<sup>2</sup>, В.Ф. Фомичёва<sup>1</sup>

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

e-mail: gousev@bmsu.ru; grigoryev52@mail.ru; w.fomicheva@yandex.ru

<sup>2</sup>Московский государственный машиностроительный университет (МАМИ),  
Москва, Российская Федерация

*Предложена новая методика расчета стержней, несущих сосредоточенную массу и частично погруженных в жидкость. Такая расчетная схема хорошо моделирует высотные нефтедобывающие платформы, установленные на сваях на дне моря. Данные конструкции испытывают действие со стороны морских волн и течений, ветровое, а также сейсмическое воздействие со стороны основания. Эти факторы носят случайный характер. Определен полный эксплуатационный риск при комплексном воздействии всех указанных явлений.*

**Ключевые слова:** случайные колебания, стержень, жидкость, надежность.

## RANDOM VIBRATION OF COLUMNS PARTLY SUBMERGED IN LIQUID

A.S. Gusev<sup>1</sup>, Yu.V. Grigoryev<sup>1</sup>, S.A. Starodubtseva<sup>2</sup>, V.F. Fomicheva<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

e-mail: gousev@bmsu.ru; grigoryev52@mail.ru; w.fomicheva@yandex.ru

<sup>2</sup>Moscow State University of Mechanical Engineering, Moscow, Russian Federation

*The article offers a new design procedure of the columns bearing localized mass and partly submerged in liquid. This design diagram perfectly describes open-sea oil-production platforms mounted on piles at the bottom of the sea. These structures withstand the effect the wind and water flow and waves action, as well as the earthquakes, and their impact is random. The total operational risk because of complex influence of all mentioned factors is defined.*

**Keywords:** random vibrations, column, liquid, reliability.

При прогнозировании надежности функционирования высотных нефтедобывающих комплексов, установленных на сваях на дне моря, часто используется расчетная схема стержня с распределенной и сосредоточенными массами, подвергаемого сейсмическим, ветровым и волновым воздействиям случайного характера [1]. Определенные трудности при этом состоят в учете инерционных и демпфирующих свойств морской воды, вовлекаемой в общий с конструкцией колебательный процесс.

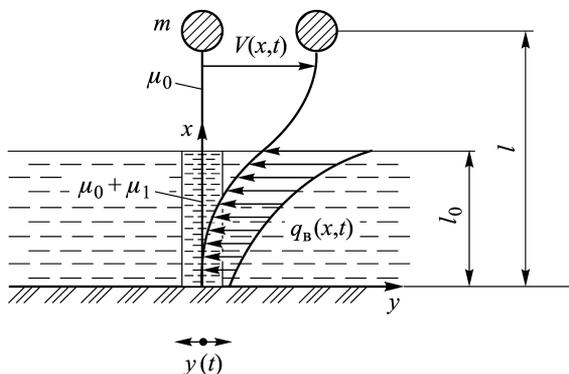


Рис. 1. Расчетная схема при анализе сейсмического воздействия

**Сейсмическое воздействие.** Рассмотрим защемленный снизу вертикальный стержень, имеющий распределенную  $\mu_0$  и сосредоточенную  $m$  массы, подвергаемый через основание кинематическим случайным горизонтальным сотрясениям с заданными вероятностными характеристиками, моделирующими сейсмическое воздействие (рис. 1).

Задача состоит в определении вероятности того, что на заданном периоде функционирования системы перемещения и напряжения не превысят опасных значений.

Если обозначить упругое перемещение стержня в сечении с координатой  $x$  в момент времени  $t$  как  $V(x, t)$ , то дифференциальное уравнение колебаний для определения этого перемещения без учета демпфирующих свойств материала стержня можно представить в виде

$$\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + CV = -\mu a(t) - q_B(x, t), \quad (1)$$

где расчетная распределенная масса стержня определяется как

$$\mu(x) = \begin{cases} m\delta(x - l), \\ \mu_0, & x \in (l_0, l), \\ \mu_0 + \mu_1, & x \in (0, l_0). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь  $\mu_1 = c_1 \rho \frac{\pi d^2}{4}$  — присоединенная масса воды, вовлекаемая в общий колебательный процесс ( $c_1 = 0,9 \dots 2,3$  — коэффициент присоединенной массы воды,  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$  — плотность воды,  $d$  — расчетный диаметр стержня);  $C = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)$  — упругий оператор изгиба;  $a(t) = \ddot{y}(t)$  — виброускорение основания;

$$q_B(x, t) = c\rho \frac{d}{2} (\dot{y} + \dot{V}) |\dot{y} + \dot{V}| \quad (3)$$

— распределенная нагрузка от сопротивления воды, определенная в соответствии с теоремой механики об изменении количества движе-

ния;  $c_2 = 0,35 \dots 1,8$  — коэффициент лобового сопротивления стержня;  $\dot{y}(t)$  — виброскорость основания.

Нелинейную функцию в соотношении (3) линеаризуем по критерию равенства дисперсий и представляем в виде

$$(\dot{y} + \dot{V})|\dot{y} + \dot{V}| = k(\dot{y} + \dot{V}),$$

где  $k \approx \sqrt{3(S_y^2 + S_V^2)}$  — коэффициент линеаризации ( $S_y^2$  и  $S_V^2$  — дисперсии скоростей виброперемещений стержня и основания).

В последнем приближенном равенстве взаимная корреляция процессов  $\dot{y}(t)$  и  $\dot{V}(t)$  не учтена.

Дифференциальное уравнение (1) принимает вид

$$\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \alpha(S_V) \frac{\partial V}{\partial t} + CV = q(t), \quad (4)$$

где  $q(t) = -\mu a(t) - \alpha \dot{y}(t)$  — внешняя распределенная нагрузка, определяющая раскачивание стержня;  $\alpha = C_2 \rho \frac{d}{2} \sqrt{3(S_y^2 + S_V^2)}$  — коэффициент, определяющий демпфирующие свойства воды.

Если учитывать только первую форму колебаний  $\varphi(x)$ , то решение уравнения (4) можно найти в виде

$$V(x, t) = u(t)\varphi(x), \quad (5)$$

где вероятностные характеристики процесса  $u(t)$  подлежат определению.

Тогда, используя выражение  $\dot{V}(x, t) = \dot{u}(t)\varphi(x)$ , получаем

$$S_V^2 = S_u^2 \varphi^2(x) \approx \varphi_1 S_u^2,$$

где функция  $\varphi^2(x)$  заменена на ее эффективное значение  $\varphi_1 = \frac{1}{l_0} \int_0^{l_0} \varphi^2(x) dx$ .

Коэффициент  $\alpha$  примет вид

$$\alpha = c_2 \rho \frac{d}{2} \sqrt{3(S_y^2 + \varphi_1 S_u^2)}.$$

Напряжения в стержне будут вычисляться по формуле

$$\sigma(x, t) = \frac{EI}{W} u(t) \varphi''(x).$$

Подставив выражение (5) в соотношение (4) и умножив его скалярно на функцию  $\varphi(x)$ , получим следующее дифференциальное уравнение для определения функции  $u(t)$ :

$$M\ddot{u} + \beta\dot{u} + \lambda u = Q(t), \quad (6)$$

где  $M = (\mu\varphi, \varphi)$  – обобщенная масса;  $\beta = (\alpha\varphi, \varphi)$  – обобщенный коэффициент демпфирования;  $\lambda = (C\varphi, \varphi)$  – обобщенная жесткость;  $Q = (q, \varphi)$  – обобщенная сила. Здесь запятой обозначено скалярное произведение соответствующих функций. При  $EI = \text{const}$  и  $\varphi(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{l}\right)$  получаем:

$$M = m + \frac{3}{2}\mu_0 l - \frac{4}{\pi}\mu_0 l + \frac{3}{2}\mu_1 l_0 - 4l\mu_1 \frac{\sin\left(\frac{\pi l_0}{2l}\right)}{\pi} + \frac{1}{2}l\mu_1 \frac{\sin\left(\frac{\pi l_0}{2l}\right)}{\pi};$$

$$\lambda = \int_0^l (EI\varphi''(x))''\varphi(x)dx \approx \int_0^l EI(\varphi''(x))^2 dx = \frac{EI\pi^4}{32l^3};$$

$$Q(t) = - \left[ m + \mu_0 l \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) + \mu_1 l \left(\frac{l_0}{l} - 2 \sin \frac{\pi l_0}{2l}\right) \right] a(t) - \alpha l \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \dot{y}(t);$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{l_0} \int_0^{l_0} \varphi^2(x)dx = \frac{3}{2} - 4 \frac{l}{l_0} \frac{\sin\left(\frac{\pi l_0}{2l}\right)}{\pi} + \frac{1}{2} \frac{l}{l_0} \frac{\sin\left(\frac{\pi l_0}{l}\right)}{\pi};$$

$$\beta = (\alpha\varphi(x), \varphi(x)) \approx \alpha l_0 \left( \frac{3}{2} - 4 \frac{l}{l_0} \frac{\sin\left(\frac{\pi l_0}{2l}\right)}{\pi} + \frac{1}{2} \frac{l}{l_0} \frac{\sin\left(\frac{\pi l_0}{l}\right)}{\pi} \right).$$

Уравнение (6) приводим к виду

$$\ddot{u} + 2n\dot{u} + \omega_0^2 u = f(t), \quad (7)$$

где  $\omega_0^2 = \frac{\lambda}{M}$ ,  $f(t) = \frac{1}{M}Q(t)$ ,  $2n = \frac{\beta}{M}$ .

Максимальные напряжения в стержне будут вычисляться по формуле

$$\sigma(t, x = 0) = E \frac{\pi^2 d}{8l^2} u(t). \quad (8)$$

Особенность уравнения (7) состоит в том, что коэффициент демпфирования  $n$  зависит от неизвестной дисперсии процесса  $\dot{u}(t)$ .

Передаточные функции от  $f(t)$  к  $u(t)$  и от  $f(t)$  к  $\dot{u}(t)$  определяются по формулам

$$H_{fu}(i\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2ni\omega}, \quad H_{f\dot{u}}(i\omega) = i\omega H_{fu}(i\omega). \quad (9)$$

Характерная особенность сейсмического воздействия состоит в его нестационарности и относительной кратковременности. Примерно к шестой секунде такое воздействие обычно достигает максимума и к

30-й секунде затухает [1]. Здесь, однако, ограничимся решением поставленной задачи в предположении, что всегда можно выделить некоторый небольшой период времени (порядка 10...15 с), когда сейсмическое воздействие достигает максимума и его на этом интервале времени можно считать стационарным. Сложные расчеты надежности механических систем при нестационарных воздействиях с малозначимыми поправками на нестационарность и кратковременность описаны в работах [1, 2, 5].

В рассматриваемом случае дисперсии процессов  $u(t)$  и  $\dot{u}(t)$  можно вычислить по формулам:

$$S_u^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H_{fu}(i\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega; \quad (10)$$

$$S_{\dot{u}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H_{f\dot{u}}(i\omega)|^2 S_f(\omega) d\omega, \quad (11)$$

где  $S_f(\omega)$  — заданная спектральная плотность процесса  $f(t)$ .

После вычисления интеграла соотношение (11) переходит в алгебраическое уравнение для определения дисперсии  $S_{\dot{u}}^2$ . Подставив это значение дисперсии в формулу (10) и вычислив интеграл, находим дисперсию  $S_u^2$  процесса  $u(t)$ . Она будет равна дисперсии перемещения верхнего конца стержня.

Вероятность того, что это перемещение на заданном интервале времени  $(0, t)$  ни разу не превысит заданный опасный уровень  $u_*$  (“надежность по перемещениям”) будет вычисляться по формуле

$$P\{u(\tau) \leq u_*, \tau \in (0, t)\} = 1 - t \frac{S_{\dot{u}}}{2\pi S_u} \exp\left(-\frac{u_*^2}{2S_u^2}\right). \quad (12)$$

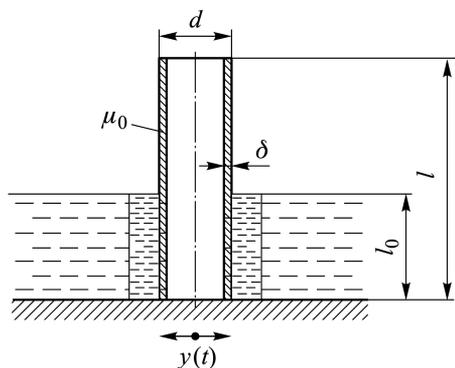
Вероятность того, что максимальные напряжения на заданном интервале времени  $(0, t)$  ни разу не превысит заданный опасный уровень  $\sigma_*$  (“надежность по напряжениям”) будет вычисляться по формуле

$$P\{\sigma(\tau) \leq \sigma_*, \tau \in (0, t)\} = 1 - t \frac{S_{\dot{\sigma}}}{2\pi S_{\sigma}} \exp\left(-\frac{\sigma_*^2}{2S_{\sigma}^2}\right), \quad (13)$$

где  $S_{\sigma} = E \frac{\pi^2 d}{8l^2} S_u$ .

Полный риск использования сооружения будет равен сумме рисков (сумме вторых слагаемых), полученных из формул (12) и (13).

**Тестовый пример.** В качестве иллюстративного примера рассмотрим трубу длиной  $l = 10$  м, наполовину погруженную в воду ( $l_0 = 0,5l = 5$  м), имеющую плотность материала  $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>, модуль упругости  $E = 1 \cdot 10^7$  Н/см<sup>2</sup>, наружный диаметр  $d = 20$  см, толщину стенки  $\delta = 1$  см, отклонением виброускорений  $S_{\dot{y}} = 2$  м/с<sup>2</sup>



**Рис. 2. Тестовый пример сейсмического воздействия**

$\mu_0 = \rho A = 16,96 \text{ кг/м}$  — распределенная масса стержня;  
 $\mu_1 = \rho_v \frac{\pi d^2}{4} = 31,41 \text{ кг/м}$  — распределенная масса присоединенной воды;  
 $EJ = 3,14 \cdot 10^5 \text{ Н}\cdot\text{м}^2$  — жесткость сечения стержня;  
 $\lambda \approx \frac{3EJ}{l^3} = 9563 \text{ Н/м}$  — жесткость стержня по первой форме колебаний;  
 $M = 41,24 \text{ кг}$  — обобщенная масса системы стержень–вода по первой форме колебаний;  
 частота колебаний первой формы без учета присоединенной массы воды  $\omega_0 = 15,77 \text{ с}^{-1}$ , а с таким учетом  $\omega_0 = 15,23 \text{ с}^{-1}$  (т.е. учет присоединенной массы воды в рассматриваемом случае можно считать несущественным фактором);  
 $S_{\dot{y}} = S_{\ddot{y}}/\omega_0 = 0,131 \text{ м/с}$  — среднее квадратическое отклонение вибросистемы основания;  $\beta = 39,6 \text{ кг/с}$  — коэффициент демпфирования в уравнении (6).

Из соотношения (11) получаем следующее алгебраическое уравнение для определения среднее квадратического отклонения скорости перемещения верхнего конца стержня:

$$S_{\dot{u}} = \int_{-\infty}^{\infty} = \frac{\omega^2 S_f(\omega) d\omega}{4\omega^2 n^2}.$$

Отсюда находим  $S_{\dot{u}} = 3,9 \text{ м/с}$ ,  $S_u = 0,136 \text{ м}$ . Коэффициент демпфирования в уравнении (7)  $n = 0,48 \text{ с}^{-1}$ . Среднее квадратическое отклонение максимальных напряжений в стержне  $S_\sigma = \frac{\pi^2 E d}{8l^2} = 3,37 \text{ МПа}$ .

При времени функционирования  $t = 10 \text{ с}$  по формулам (12) и (13) определяем надежность по перемещениям и напряжениям  $P_1 = 0,999$  и  $P_2 = 0,998$ , полный риск  $R = 0,003$ .

**Волновое воздействие.** Рассмотрим расчет стержня на волновые воздействия, возникающие в море при шторме. Здесь колебания

с частотой  $\omega$ , равной частоте собственных колебаний системы  $\omega_0$  (резонансный режим с энергетическим спектром ускорений  $S_{\ddot{y}}(\omega) = S_{\ddot{y}}^2 \delta(\omega - \omega_0)$ ), что примерно соответствует 9-балльному землетрясению (рис. 2).

Предельно допустимое перемещение верхнего конца стержня  $u_* = 70 \text{ см}$ . Предельно допустимое напряжение в заделке  $\sigma_* = 150 \text{ МПа}$ . Запишем следующее:  $A \approx \pi d \delta = 62,8 \text{ см}^2$  — площадь сечения стержня;

жидкости являются фактором, раскачивающим стержень, а не тормозящим его движение. При этом считается, что горизонтальное движение жидкости обусловлено ее перетеканием с гребня одной волны через впадину на гребень другой волны (рис. 3, а).

При этом интенсивность воздействия на стержень зависит от скорости  $\dot{h}(t)$  и ускорения  $\ddot{h}(t)$  изменения во времени высот волн  $h(t)$  на поверхности моря. Эти высоты волн считаются гауссовыми стационарными процессами и задаются спектральной плотностью  $S_h(\omega)$ . С приближением ко дну эффективная высота волн меняется, например, как

$$h(x, t) = \frac{x}{l} h(t) \quad (14)$$

и интенсивность их воздействия уменьшается. Можно принять, что с удалением от поверхности моря спектральные плотности скоростей и ускорений изменяются в соответствии с формулами

$$S_{\dot{h}}(\omega, x) = \omega^2 S_h(\omega) \frac{x^2}{l_0^2}; \quad (15)$$

$$S_{\ddot{h}}(\omega, x) = \omega^4 S_h(\omega) \frac{x^2}{l_0^2}, \quad (16)$$

где  $x$  — расстояние от дна до рассматриваемого стержня;  $l_0$  — длина подводной части сооружения.

Обозначим, как и ранее, через  $V(x, t)$  — упругое перемещение стержня в сечении с координатой  $x$  в момент времени  $t$ . Дифференциальное уравнение колебаний стержня можно принять в виде

$$\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = CV = q(x, t), \quad (17)$$

где все обозначения прежние, а распределенная нагрузка от воздействия воды состоит из инерционной и скоростной составляющих и

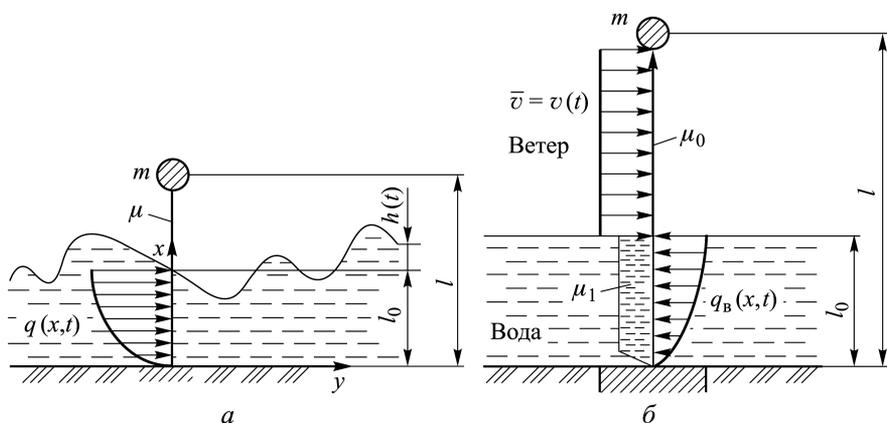


Рис. 3. Расчетная схема при анализе волнового (а) и ветрового (б) воздействий

(без учета податливости стержня) может быть принята в виде

$$q(x, t) = a\ddot{h}(x, t) + b\dot{h}(x, t)|\dot{h}(x, t)|, \quad (18)$$

где  $a = C_1\rho\frac{\pi d^2}{4}$ ,  $b = C_2\rho\frac{d}{2}$ .

Нелинейную функцию в соотношении (18) линеаризуем по критерию равенства дисперсий и представляем в виде  $\dot{h}|h| = k\dot{h}$ , где

$$k(x) = \sqrt{3}\frac{x}{l_0}S_{\dot{h}}(x = l_0) \quad (19)$$

— коэффициент линеаризации. Здесь  $S_{\dot{h}}(x = l_0)$  — среднеквадратическое отклонение скорости изменения высоты волн на поверхности моря.

Решение уравнения (17) при учете только первой формы колебаний  $\varphi(x)$  будем искать в виде

$$V(x, t) = u(t)\varphi(x), \quad (20)$$

где  $u(t)$  — функция времени, подлежащая определению,  $\varphi(x) \approx \approx 1 - \cos\frac{\pi x}{2l}$  — приближенное уравнение для первой формы колебаний стержня.

Подставив выражение (20) в уравнение (17) и умножив его скалярно на функцию  $\varphi(x)$ , получим следующее дифференциальное уравнение для определения функции  $u(t)$ :

$$M\ddot{u} + \lambda u = Q(t), \quad (21)$$

где  $M = (\mu\varphi, \varphi) = m + \frac{3}{2}\mu_0l - \frac{4}{\pi}\mu_0l$  — обобщенная масса;

$$\lambda = \int_0^l (EI\varphi''(x))''\varphi(x)dx \approx \int_0^l EI(\varphi''(x))^2dx = \frac{EI\pi^4}{32l^3}$$

— обобщенная жесткость;  $Q(t) = (q(x, t), \varphi(x)) = a\left(\frac{x}{l_0}, \varphi(x)\right)\ddot{h}(t) + b\sqrt{3}S_{\dot{h}}\left(\frac{x^2}{l_0^2}, \varphi(x)\right)\dot{h}(t)$  — обобщенная сила.

После вычисления скалярных произведений получаем:

$$Q(t) = (q(x, t), \varphi(x)) \approx 0,27\frac{l^2}{l_0}a\ddot{h}(t) + 0,37\frac{l^3}{l_0^2}bS_{\dot{h}}\dot{h}(t).$$

Уравнение (21) приводим к виду

$$\ddot{u} + \omega_0^2u = f(t), \quad (22)$$

где  $\omega_0^2 = \frac{\lambda}{M}$ ,  $f(t) = \frac{1}{M}Q(t)$ .

Спектральная плотность процесса будет вычисляться по формуле

$$S_f(\omega) = \frac{1}{M^2} S_Q(\omega). \quad (23)$$

**Ветровое воздействие.** Рассмотрим теперь случай ветрового воздействия на надводную часть конструкции. Как и в случае сейсмического воздействия наличие в нижней части системы жидкости будет являться фактором, тормозящим движения стержня (рис. 3, б).

Ветровое воздействие будет фактором статического изгиба и раскачивания системы. Ветровое воздействие на надводную часть конструкции состоит из средней постоянной

$$\bar{q} = c_2 \frac{d}{2} \rho \bar{v}^2 = \text{const}$$

и пульсационной

$$q(t) = c_2 d \rho \bar{v} v(t)$$

составляющих (квадратом пульсационных составляющих пренебрегаем). Здесь  $\bar{v}$  — средняя скорость ветра;  $v(t)$  — пульсационная составляющая скорости ветра;  $d$  — ширина конструкции;  $\rho = 1,29 \text{ кг/м}^3$  — плотность воздуха;  $c = 0,35 \dots 1,8$  — коэффициент лобового сопротивления.

Если через  $V(x, t)$  обозначить упругое перемещение стержня в сечении с координатой  $x$  в момент времени  $t$ , то сопротивление воды движению стержня, действующее при  $x \in \{0, l_0\}$ , можно вычислить по формуле (в соответствии с теоремой механики об изменении количества движения)

$$q_b(x, t) = c_2 \rho_b \frac{d}{2} \dot{V}(x, t) |\dot{V}(x, t)|, \quad (24)$$

где  $\rho_b = 1000 \text{ кг/м}^3$  — плотность воды.

Дифференциальное уравнение колебаний стержня можно записать в виде

$$\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + CV = q(t) - q_b(x, t), \quad (25)$$

где расчетная распределенная масса определяется как

$$\mu(x) = \begin{cases} m\delta(x - l), \\ \mu_0, & x \in (l_0, l), \\ \mu_0 + \mu_1, & x \in (0, l_0). \end{cases} \quad (26)$$

Здесь  $m$  — сосредоточенная масса;  $\mu_0$  — распределенная масса стержня;  $\mu_1$  — присоединенная масса воды;  $C$  — упругий оператор изгиба.

Нелинейную функцию в соотношении (24) линеаризуем по критерию равенства дисперсий и представляем в виде

$$\dot{V}|\dot{V}| = k\dot{V}, \quad (27)$$

где коэффициент линеаризации

$$k(x) = \sqrt{3} S_{\dot{V}}(x). \quad (28)$$

Здесь

$$S_{\dot{V}}^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_V(\omega, x) d\omega \quad (29)$$

— дисперсия скорости движения стержня в сечении с координатой  $x$ ;  $S(\omega, x)$  — спектральная плотность перемещения в сечении с координатой  $x$ .

Дифференциальное уравнение (25) принимает вид

$$\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \alpha(S_{\dot{V}}(x)) \frac{\partial V}{\partial t} + CV = q(t), \quad (30)$$

где

$$\alpha(S_{\dot{V}}(x)) = c_2 \rho_B \frac{d}{2} \sqrt{3} S_{\dot{V}}(x). \quad (31)$$

Особенность уравнения (30) состоит в том, что его решение зависит от неизвестной функции  $S_{\dot{V}}(x)$ , которая должна быть определена по ходу решения задачи.

Решение уравнения (30) будем искать в виде

$$V(x, t) = u(t)\varphi(x), \quad (32)$$

где  $\varphi(x) \approx 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$  — приближенное выражение первой формы колебаний;  $u(t)$  — функция времени, подлежащая определению.

Подставив выражение (32) в уравнение (30) и умножив его скалярно на функцию  $\varphi(x)$ , получим дифференциальное уравнение для определения функции  $u(t)$ , аналогичное (6). Выражения для обобщенных масс по первой форме колебаний и жесткости см. с. 81;  $\beta = (\alpha(S_{\dot{V}}(x))\varphi(x), \varphi(x))$  — обобщенный коэффициент демпфирования;  $Q(t) = (q(t), \varphi(x)) = \left[ l \left( 1 - \frac{2}{\pi} \right) - l_0 + \frac{2}{\pi} l \sin\left(\frac{l_0 \pi}{2l}\right) \right] q(t)$  — обобщенная сила. Здесь запятой указано скалярное произведение соответствующих функций.

Уравнение (6) приводим к виду

$$\ddot{u} + 2n\dot{u} + \omega_0^2 u = f(t), \quad (33)$$

где  $2n = \frac{\beta}{M}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{\lambda}{M}$ ;  $f(t) = \frac{1}{M} Q(t)$ .

Решение этого уравнения можно получить так же, как это было сделано при рассмотрении уравнения (7). Определенные упрощения получим, если заметим, что

$$S_{\dot{V}}(x) \approx \omega_0 S_V(x) = \omega_0 S_u \varphi(x).$$

Тогда коэффициент  $\beta$  будет определяться как

$$\beta = c\rho d\sqrt{3}\omega_0\gamma S_u,$$

где константа  $\gamma = (\varphi^2(x), \varphi(x)) = \int_0^{l_0} \varphi^3(x)dx$ .

Для определения искомой дисперсии процесса  $u(t)$  получаем соотношение

$$S_u^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_f(\omega)d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}, \quad (34)$$

где  $S_f(\omega) \left( \frac{l(-2 + \pi) - l_0\pi + 2l \sin\left(\frac{l_0\pi}{2l}\right)}{\pi} \right) \frac{1}{M^2} c^2 d^2 \rho^2 \bar{v}^2 S_v(\omega)$  — спектральная плотность процесса  $f(t)$ ;  $S_v(\omega)$  — заданная спектральная плотность пульсационной составляющей скорости ветра,  $2n = \frac{\sqrt{3}cd}{M} \rho\gamma\omega_0^2 S_u$ .

После вычисления интеграла соотношение (34) переходит в алгебраическое уравнение для определения величины  $S_u^2$ .

Таким образом, поставленную задачу можно считать решенной, поскольку теперь по формулам (12) и (13) можно вычислить искомые характеристики надежности рассматриваемой системы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1999. 504 с.*
2. *Гусев А.С. Вероятностные методы в механике машин и конструкций. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. 223 с.*
3. *Гусев А.С., Светлицкий В.А. Расчет конструкций при случайных воздействиях. М.: Машиностроение, 1984. 240 с.*
4. *Крылов Ю.М., Стрекалов С.С., Цыплухин В.Ф. Ветровые волны и их воздействие на сооружения. Л.: Гидрометеиздат, 1976. 298 с.*
5. *Whitney C. Random Processes in Physical Systems. New York: John Willey, 1990. 320 p.*

## REFERENCES

- [1] Bolotin V., ed. *Vibratsii v tekhnike: Spravochnik. T. 1. Kolebaniya lineynykh sistem [Vibrations in Engineering. Handbook. Vol. 1. Linear Systems Vibrations]*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1999. 504 p.
- [2] Gusev A. *Veroyatnostnye metody v mekhanike mashin i konstruksiy [Probability Methods for Machine and Structure Mechanics]*. Moscow, MGTU im. N.E. Bauman Publ., 2009. 223 p.

- [3] Gusev A.S., Svetlitskiy V.A. Raschet konstruktsiy pri sluchaynykh vozdeystviyakh [Structure Analysis under Random Force], Moscow, Mashinostroenie Publ., 1984. 240 p.
- [4] Krylov Yu.M., Strelkov S.S., Tsyplyukhin V.F. Vetrovye volny i ikh vozdeystvie na sooruzheniya [Wind Waves and their Effect at Structures]. Leningrad, Hydrometeoizdat Publ., 1976. 298 p.
- [5] Whitney C. Random Processes in Physical Systems. N.Y., John Willey, 1990. 320 p.

Статья поступила в редакцию 25.11.2014

Гусев Александр Сергеевич — д-р техн. наук, профессор кафедры “Прикладная механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Gusev A.S. — Dr. Sci. (Eng.), Professor of Applied Mechanics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Григорьев Юрий Всеволодович — канд. техн. наук, доцент кафедры “Прикладная механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Grigoryev Yu.V. — Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Professor of Applied Mechanics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Стародубцева Светлана Александровна — канд. техн. наук, доцент Московского государственного машиностроительного университета (Российская Федерация, 107023, Москва, ул. Большая Семеновская, д. 38).

Starodubtseva S.A. — Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Professor of Moscow State University of Mechanical Engineering (Bolshaya Semenovskaya ul. 38, Moscow, 107023 Russian Federation).

Фомичёва Валентина Федоровна — канд. техн. наук, доцент кафедры “Прикладная механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Fomicheva V.F. — Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Professor of Applied Mechanics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Гусев А.С., Григорьев Ю.В., Стародубцева С.А., Фомичёва В.Ф. Случайные колебания стержней, частично погруженных в жидкость // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2016. № 2. С. 81–92. DOI: 10.18698/0236-3941-2016-2-81-92

**Please cite this article in English as:**

Gusev A.S., Grigoryev Yu.V., Starodubtseva S.A., Fomicheva V.F. Random vibration of columns partly submerged in liquid. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Mashinost.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2016, no. 2, pp. 81–92. DOI: 10.18698/0236-3941-2016-2-81-92