

УДК 621.833.6

В. П. Прохоров, Г. А. Тимофеев,
И. Н. Чернышева

АЛГОРИТМ СИНТЕЗА ПЛОСКИХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ ПО КРИТЕРИЮ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Обоснована актуальность постановки задачи синтеза плоских зацеплений по критерию кривизны профилей зубьев колес. На базе математической модели плоских зацеплений с постоянным передаточным отношением приведен алгоритм решения задачи по заданной постоянной кривизне. Полученные решения позволяют выполнить анализ плоских цевочных зацеплений общего вида.

E-mail: timga@bmstu.ru

Ключевые слова: алгоритм синтеза, кривизна, цевочное зацепление, линия зацепления, профили зубьев.

Постановка задачи. Настоящая работа выполнена в русле концепций и методов, представленных в [1–5]. Зубчатые колеса с постоянной кривизной профилей зубьев в основном конструктивно выполняют цевочными. Это позволяет повысить технологичность, исключить в контактной точке относительное скольжение и, соответственно, на порядок снизить износ профилей, потери мощности на трение и увеличить коэффициент полезного действия [6–10].

Математическая модель и алгоритм синтеза. Математическую модель плоского зацепления с постоянным передаточным отношением можно представить в виде [1, 2]:

$$v_j = -a_j \omega_j \sin \alpha + r(\dot{\alpha} - \omega_j); \quad (1)$$

$$\dot{r} + a_j \omega_j \cos \alpha = 0; \quad (2)$$

$$k_j = (\dot{\alpha} - \omega_j)/v_j, \quad (3)$$

где $j = 1, 2$ — индекс колеса; v_j — скорость точки контакта по профилю зуба; a_j — радиус центроиды; ω_j — угловая скорость; α — угол зацепления; r — расстояние от точки контакта до полюса зацепления; k_j — кривизна профиля зуба; точка над параметром означает его производную по времени t . Приведенная модель успешно использовалась нами в [6–12] и других работах.

Рассмотрим решение задачи синтеза зацепления по критерию постоянной нормальной кривизны $k_j = \text{const}$. Запишем (3) с учетом (1) в виде

$$R_j = \frac{v_j}{\dot{\alpha} - \omega_j} = r - \frac{a_j \omega_j \sin \alpha}{\dot{\alpha} - \omega_j},$$

откуда

$$r = R_j + \frac{a_j \omega_j \sin \alpha}{\dot{\alpha} - \omega_j}, \quad (4)$$

где $R_j = 1/k_j$ — радиус кривизны, а второе слагаемое, как легко непосредственно убедиться, это линия зацепления для критерия $v_j = 0$. Она дается формулой [5]

$$\tilde{r}|_{v_j=0} = -a_j \sin \alpha \pm a_j \sqrt{\sin^2 \alpha + c_0},$$

где параметр c_0 имеет выражение

$$c_0 = \frac{2\tilde{r}_0}{a_j} \left(\frac{\tilde{r}_0}{2a_j} + \sin \alpha_0 \right).$$

Таким образом, получаем

$$r = R_j - a_j \sin \alpha \pm a_j \sqrt{\sin^2 \alpha + c_0}. \quad (5)$$

Здесь выбор знака определяется заданием начальных условий. Дифференцируя (5) по времени и сравнивая с (2), находим, что функция $\alpha(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\alpha} = \frac{\omega_j}{1 \mp \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + c_0}}}. \quad (6)$$

Его решение имеет вид

$$\varphi_1 = \alpha - \alpha_0 \pm \left[\arcsin \frac{\cos \alpha}{\sqrt{c_0 + 1}} - \arcsin \frac{\cos \alpha_0}{\sqrt{c_0 + 1}} \right]. \quad (7)$$

Имея выражения (5) и (7), можно записать формулы для профилей зубьев колес в виде

$$x_j = a_j \cos \varphi_j + r \sin (\alpha - \varphi_j);$$

$$y_j = -a_j \sin \varphi_j - r \cos (\alpha - \varphi_j)$$

или если второе звено — поступательно движущаяся рейка, то

$$x'_2 = r \sin \alpha;$$

$$y'_2 = -a_j \varphi_j - r \cos \alpha.$$

Полученные результаты соответствуют внеполюсному цевочному зацеплению, описанному в работе [6] путем введения в модель дополнительной геометрической связи

$$(a_1 + e) \sin \varphi_1 = -(r + \rho) \cos \alpha. \quad (8)$$

Здесь ρ — радиус цевки; e — смещение центра цевки относительно полюса. Установим связь между постоянными c_0 и e . Сравнивая (7) и (8), получаем

$$e = a_1 (\sqrt{c_0 + 1} - 1). \quad (9)$$

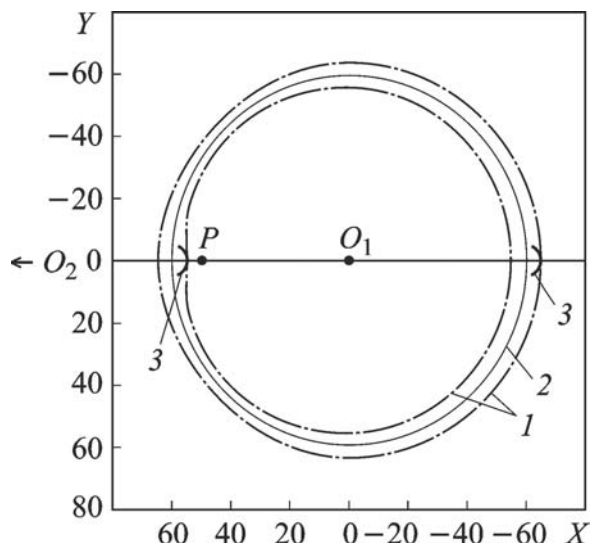


Рис. 1. Линии зацепления для случая $k_1 = \text{const}$ (внеполюсное цевочное зацепление, $c_0 > 0$):

1 — линия зацепления; 2 — линия центров цевки; 3 — профиль первого звена (цевки); O_1 — ось вращения первого звена; O_2 — ось вращения второго звена; P — полюс зацепления

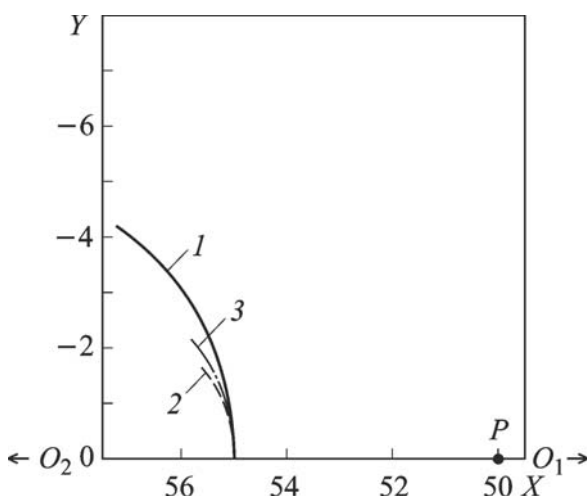


Рис. 2. Профили звеньев для случая $k_1 = \text{const}$ (внеполюсное цевочное зацепление, $c_0 > 0$):

1 — профиль первого звена (цевки); 2 — профиль второго звена; 3 — профиль рейки; O_1 — ось вращения первого звена; O_2 — ось вращения второго звена; P — полюс зацепления

Линии зацепления для постоянной кривизны профиля первого звена для внеполюсного цевочного зацепления с $a_1 = 50$ мм и передаточного отношения $i_{12} = 2$ представлены на рис. 1. Две кривые линии зацепления соответствуют знаку “ \pm ” в (5). Линия, соответствующая знаку “+”, находится внутри линии центров цевки, а линия, соответствующая знаку “-”, находится снаружи. В обоих случаях профиль цевки — дуга окружности. Более подробно профиль цевки и профили второго звена показаны на рис. 2.

Рассмотрим случай $k_j = \text{const}$, $v_j = \text{const}$. Для относительной скорости с учетом (5) и (6) получаем следующее выражение:

$$v_j = -a_j \omega_j \sin \alpha + \left(R_j - a_j \sin \alpha \pm a_j \sqrt{\sin^2 \alpha + c_0} \right) \left(\frac{\omega_j}{1 \mp \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + c_0}}} - \omega_j \right) =$$

$$= -a_j \omega_j \sin \alpha + \left(R_j - a_j \sin \alpha \pm a_j \sqrt{\sin^2 \alpha + c_0} \right) \times$$

$$\times \frac{a_j \omega_j \sin \alpha}{-a_j \sin \alpha \pm a_j \sqrt{\sin^2 \alpha + c_0}} = \frac{R_j}{r - R_j} a_j \omega_j \sin \alpha. \quad (10)$$

Отсюда, чтобы $v_j = \text{const}$, должно быть $r = R_j + C \sin \alpha$. Подставив последнее в (10), получим тождество

$$((C + a_j)^2 - a_j^2) \sin^2 \alpha - a_j^2 c_0 = 0.$$

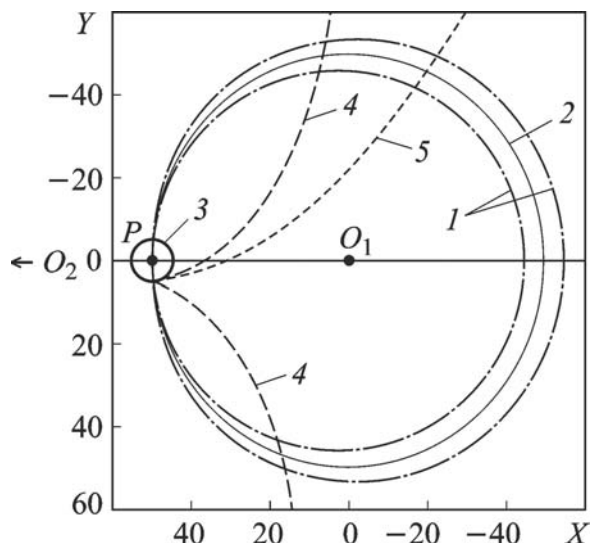


Рис. 3. Линии зацепления и профили звеньев для случая $k_1 = \text{const}$ (полюсное цевочное зацепление, $c_0 = 0$):

1 — линия зацепления; 2 — линия центров цевки; 3 — профиль первого звена (цевки); 4 — профиль второго звена; 5 — профиль рейки; O_1 — ось вращения первого звена; O_2 — ось вращения второго звена; P — полюс зацепления

Оно выполняется для любого α только при условии $C = -2a_j$, $c_0 = 0$. Из (9) следует также $e = 0$, т.е. случай постоянной кривизны и скорости соответствует полюсному цевочному зацеплению. Линия зацепления имеет вид

$$r = R_j - 2a_j \sin \alpha, \quad (11)$$

что представляет собой полярное уравнение улитки Паскаля.

Линии зацепления и профили звеньев для постоянной кривизны профиля первого звена для полюсного цевочного зацепления с $a_1 = 50$ мм и передаточного отношения $i_{12} = 2$ представлены на рис. 3. Линия зацепления — улитка Паскаля, а профиль первого звена — окружность.

Рассмотрим случай $k_1 = \text{const}$, $k_2 = \text{const}$. В этом случае получаем совместно с уравнениями (1)–(3) избыточную систему уравнений, решение которой приводит к наложению дополнительной связи на постоянные параметры зацепления. Перепишем соотношение (4) в виде

$$\dot{\alpha} - \omega_j = \frac{a_j \omega_j \sin \alpha}{r - R_j}. \quad (12)$$

Отсюда при $R_1 = \text{const}$, $R_2 = \text{const}$

$$\omega_1 + \frac{a_1 \omega_1 \sin \alpha}{r - R_1} = \omega_2 + \frac{a_2 \omega_2 \sin \alpha}{r - R_2}. \quad (13)$$

Формула для линии зацепления в случае $k_1 = 0$, $k_2 = \text{const}$ получается из выражения (13) в виде

$$r = R_2 + \frac{a_j \omega_j \sin \alpha}{\omega_1 - \omega_2}. \quad (14)$$

Это, как и (11), полярное уравнение улитки Паскаля. Из (12) следует, что

$$\dot{\alpha} = \omega_1. \quad (15)$$

Дифференцируя (14) по времени t и используя (2), с учетом (15) получаем

$$\frac{\omega_1 a_j \omega_j \cos \alpha}{\omega_1 - \omega_2} = -a_j \omega_j \cos \alpha.$$

Отсюда $\frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_2} = -1$. Это означает, что такая передача может быть выполнена в виде торцовой [7] с внутренним зацеплением и передаточным отношением $i_{12} = 1, 2$. При этом цевки располагаются на втором колесе, а профили зубьев первого колеса – прямые, параллельные радиальным прямым. При этом скорости имеют выражения соответственно $v_1 = -a_1 \omega_1 \sin \alpha$, $v_2 = R_2(\omega_1 - \omega_2) = \text{const}$.

Если $k_1 = k_2$, то из (4) имеем $\omega_1 = \omega_2$ и, следовательно, $a_1 = a_2$, что соответствует механизму муфты с нулевым межосевым расстоянием с произвольными, но конгруэнтными элементами звеньев. Такому же результату соответствует решение при $k_1 = k_2 = \text{const}$, $k_1 = k_2 = \infty$ ($R_1 = R_2 = 0$).

На рис. 4 показана линия зацепления для случая $k_1 = 0$, $k_2 = \text{const}$.

Заключение. Полученные формулы описывают все множество полюсных и внеполюсных плоских цевочных передач с внутренним, внешним и реечным зацеплениями. В результате решения задачи появляется возможность их анализа по всему множеству основных и производных критериев эффективности, а также возможность выбора оптимальных соотношений постоянных параметров – межосевого расстояния, передаточного отношения, радиуса цевки и радиуса установки цевки.

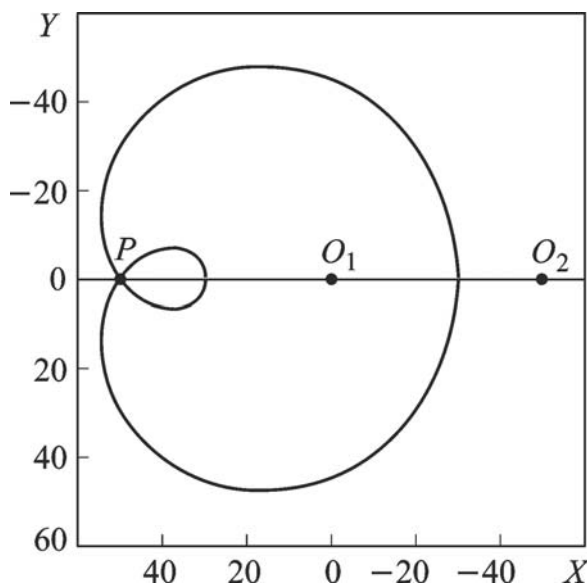


Рис. 4. Линия зацепления для случая $k_1 = 0$, $k_2 = \text{const}$:

O_1 – ось вращения первого звена; O_2 – ось вращения второго звена; P – полюс зацепления

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ленский М. Ф., Прохоров В. П. Теория зубчатых зацеплений с параллельными осями и постоянным передаточным отношением, АН СССР, VI Совещание по основным проблемам теории машин и механизмов // Тезисы докладов. – Л., 1970. – С. 78.
2. Ленский М. Ф., Прохоров В. П. Теория зубчатых зацеплений с параллельными осями и постоянным передаточным отношением / В кн.: Теория передач в машинах. – М.: АН СССР, Наука, 1973. – С. 35–39.
3. Прохоров В. П., Прохорова Н. И. Трехзвенные механизмы с винтовым движением ведомого звена // Машиноведение. – 1985. – № 6. – С. 54–59.

4. Фролов К. В., Прохоров В. П. Структурирование базы знаний для выбора оптимальных стратегий реализации программ и проектов в механике машин // Материалы 2-й Международной конференции. Проблемы механики современных машин. Т. 3. Улан-Удэ, 2003. – С. 109–112.
5. Прохоров В. П., Тимофеев Г. А., Чернышева И. Н. Синтез плоских зацеплений по относительной скорости точки контакта // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. – 2012. – Спец. вып.
6. Прохоров В. П., Чернышева И. Н. Выбор рациональных параметров торцовой передачи // Изв. вузов. Машиностроение. – 1977. – № 3.
7. Прохоров В. П., Чернышева И. Н. К вопросу синтеза разновидности торцовой цевочной передачи // Изв. вузов. Машиностроение. – 1977. – № 12.
8. Прохоров В. П., Чернышева И. Н. Расчет постоянных параметров зубчатых передач с цевочным зацеплением // Изв. вузов. Машиностроение. – 1978. – № 11.
9. Прохоров В. П., Чернышева И. Н. Исследование качественных показателей и выбор постоянных параметров циклоидальных зацеплений // Изв. вузов. Машиностроение. – 1978. – № 12.
10. Прохоров В. П., Скворцова Н. А. Аналитическая модель внеполосных цевочных зацеплений // Изв. вузов. Машиностроение. – 1985. – № 1.
11. Prokhorov V. P. Variational and non-variational solution methods of flat engagements optimization problem by friction power criterion. IFToMM-2011, 13th World Congress in Mechanism and Machine Science, Guanajuato, Mexico, 2011, Paper A9-274. официальный сайт: <http://www.iftomm.org>
12. Prokhorov V. P. Synthesis and optimization of engagements in a plane by the pressure angle criterion using euler method // IFToMM-2011, 13th World Congress in Mechanism and Machine Science, Guanajuato, Mexico, 2011, Paper A9-275. официальный сайт: <http://www.iftomm.org>

Статья поступила в редакцию 3.04.2012

Василий Петрович Прохоров окончил Омский политехнический институт в 1966 г. Канд. техн. наук, профессор, директор Александровского филиала Российского нового университета. Автор более 220 научных работ и монографий в области моделирования технических систем и философии науки.

V.P. Prokhorov graduated from the Omsk Polytechnic Institute in 1966. Ph. D., professor, director of Aleksandrov Branch of the Russian New University. Author of more than 220 publications and monographs in the field of simulation of technical systems and philosophy of science.

Геннадий Алексеевич Тимофеев окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1969 г. Д-р техн. наук, заведующий кафедрой “Теория механизмов и машин” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 190 научных и методических работ в области автоматизированного проектирования механизмов машин.

G.A. Timofeev graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1969. D. Sc., head of “Theory of Mechanisms and Machines” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 190 publications in the field of computer-aided design of machine mechanisms.