DOI: 10.18698/0236-3941-2016-3-118-124

УДК 519.8

Вероятностная модель дуэльного боя с переменными эффективными скорострельностями

В.Ю. Чуев, И.В. Дубограй

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: vacilious@mail.ru; irina.dubograi@yandex.ru

На основе теории непрерывных марковских процессов разработана модель дуэльного боя с экспоненциальными зависимостями эффективных скорострельностей боевых единиц от времени боя при упреждающем ударе одной из участвующих в бою единиц. Получены расчетные формулы для вычисления основных показателей боя. Исследована задача выбора оптимальной дальности открытия огня переносным противотанковым ракетным комплексом при его хорошей маскировке. Показано, что открытие комплексом огня на максимальной дальности стрельбы не всегда приводит к наилучшему результату. Проиллюстрирована возможность применения разработанной модели дуэльного боя для решения более общих военно-технических и военно-тактических задач, а также при создании новых образцов вооружения и военной техники.

Ключевые слова: *непрерывный марковский процесс, дуэльный бой, боевая единица, эффективная скорострельность, упреждающий удар.*

Probabilistic Model of a Duel Combat with the Variable Effective Rate of Fire

V.Yu. Chuev, I.V. Dubogray

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: vacilious@mail.ru; irina.dubograi@yandex.ru

The theory of continuous Markov process enables us to develop a model of duel combat with the exponential dependency of the effective rate of fire of firing units on the time of the combat with one of the involved units launching a preemptive attack. We devise formulae for calculating the key combat indicators and examine the problem of choosing the optimal range for a portable well camouflage anti-tank missile system to open a fire. The findings of our research show that a fire opened by the system at maximum range does not always lead to the best result. Moreover, we illustrate that the developed model of the duel combat may be applied to solve more general military-technical and military-tactical tasks, and to create new models of the armament and military equipment as well.

Keywords: *continuous Markov process, duel combat, combat unit, the effective rate of fire, a preemptive attack.*

Основой военно-технической оценки разрабатываемых образцов вооружения и военной техники являются показатели их боевой эффективности, позволяющие выявить степень приспособленности образцов к решению поставленных боевых задач. В качестве основы такой оценки целесообразно использовать модели двухсторонних боевых действий, так как они позволяют более полно учесть различные характеристики образцов, влияющие на эффективность в реальных боевых условиях, чем модели без учета ответного огня [1, 2]. В настоящее время математическое моделирование двухсторонних боевых действий получило широкое распространение при решении различных военно-тактических и военно-технических задач [3–5].

Исследование протекания боя и вычисление его основных показателей. Рассмотрим следующую задачу. Пусть переносному противотанковому ракетному комплексу (ПТРК), имеющему максимальную дальность стрельбы $D_{\max}$ и ограниченный боекомплект $Б_{о}$, поставлена задача отразить наступление танка противника. Танк наступает на позицию ПТРК со скоростью $V_{т}$, которую в первом приближении можно считать постоянной. Полагаем, что хорошая маскировка позиции ПТРК позволяет танку открыть ответный огонь только после проведения ПТРК первого выстрела через время t_c. Боевая задача ПТРК считается выполненной, если танк уничтожен до достижения им позиции ПТРК (победа ПТРК).

В противном случае, т. е. если:

а) ПТРК уничтожен ответным огнем противника;

б) ПТРК израсходовал свой боекомплект и при этом танк не уничтожен;

в) танк достигает позиции ПТРК — задача ПТРК считается невыполненной (победа танка).

Для оценки результатов боя будем использовать модель, построенную на основе теории непрерывных марковских процессов [6]. Процесс, протекающий в системе, называется марковским, если для каждого момента времени вероятность состояния системы в будущем зависит только от состояния системы в настоящий момент и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние [7].

Бой происходит следующим образом: ПТРК открывает по танку огонь и через время t_c танк открывает ответный огонь по ПТРК. Бой закончится, когда одна из противоборствующих боевых единиц будет уничтожена, или ПТРК израсходует свой боекомплект, или танк достигнет позиции ПТРК. Последовательность выстрелов, осуществляемых каждой боевой единицей, представим в виде пуассоновского потока событий [8]. При моделировании боя перейдем к «потоку успешных выстрелов», который также будем считать пуассоновским. Выстрел назовем успешным, если он поражает боевую единицу противника [9].

Введем следующие обозначения: $F_{10}(t)$ — вероятность того, что в момент времени t танк уничтожен, а ПТРК нет; $F_{01}(t)$ — вероятность того, что в момент времени t ПТРК уничтожен, а танк нет; $F_{11}(t)$ — вероятность того, что в момент времени t сохранились обе участвующие в бою единицы; $F_{00}(t)$ — вероятность того, что в момент времени t ПТРК и танк уничтожены.

Поскольку вероятность одновременного уничтожения ПТРК и танка является бесконечно малой величиной, получаем, что $F_{00}(t)=0$ в любой момент времени боя.

Введем обозначения: p_x — вероятность поражения танка одним выстрелом ПТРК; p_y — вероятность поражения ПТРК одним выстрелом танка; λ_x — практическая скорострельность ПТРК; λ_y — практическая скорострельность танка. Величины $v=p_x\lambda_x$ и $u=p_y\lambda_y$ назовем эффективными скорострельностями боевых единиц.

Теоретические исследования и опытные данные показали, что эффективные скорострельности ПТРК и танка, а также их практические скорострельности претерпевают в ходе боя значительные изменения и хорошо аппроксимируются экспоненциальными функциями времени боя, т. е.

$$v=k_x e^{a_x t}, \quad u=k_y e^{a_y t},$$
$$\lambda_x=k_z e^{a_z t}, \quad \lambda_y=k_w e^{a_w t}.$$

Тогда во время проведения ПТРК упреждающего удара (т. е. при $t\in[0;\, t_c]$) динамику боя опишет система уравнений

$$\begin{cases} F'_{10}(t)=k_x e^{a_x t}F_{11}(t); \\ F'_{01}(t)=0; \\ F'_{11}(t)=-k_x e^{a_x t}F_{11}(t) \end{cases}$$

с начальными условиями $F_{11}(0)=1;\ F_{10}(0)=F_{01}(0)=0.$

В момент времени t_c открытия танком ответного огня получим

$$\begin{cases} F_{10}\left(t_c\right)=1-e^{\frac{k_x}{a_x}\left(1-e^{a_x t_c}\right)}=A_0; \\ F_{01}\left(t_c\right)=0; \\ F_{11}\left(t_c\right)=e^{\frac{k_x}{a_x}\left(1-e^{a_x t_c}\right)}=A_1, \end{cases}$$

а также

$$B_x\left(t_c\right)=\int_0^{t_c}\lambda_x\left(t\right)F_{11}\left(t\right)dt=\int_0^{t_c}k_z e^{a_z t+\frac{k_x}{a_x}\left(1-e^{a_x t}\right)}dt=B_z,$$

где $B_x(t)$ — расход ракет ПТРК к моменту времени t.

После открытия танком ответного огня дальнейшее протекание боя опишет система уравнений

$$\begin{cases} F'_{10}(t) = k_x e^{a_x t} F_{11}(t); \\ F'_{01}(t) = k_y e^{a_y t} F_{11}(t); \\ F'_{11}(t) = -\left(k_x e^{a_x t} + k_y e^{a_y t}\right) F_{11}(t) \end{cases} \qquad (1)$$

с начальными условиями $F_{10}\left(t_c\right) = A_0;\ F_{01}\left(t_c\right) = 0;\ F_{11}\left(t_c\right) = A_1.$

Решение системы (1) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} F_{10}(t) = 1 - e^{\frac{k_x}{a_x}\left(1 - e^{a_x t_c}\right)} + k_x e^{\frac{k_x}{a_x} + \frac{k_y}{a_y} e^{a_y t_c}} \int\limits_{t_c}^{t} e^{a_x \tau - \frac{k_x}{a_x} e^{a_x \tau} - \frac{k_y}{a_y} e^{a_y \tau}} d\tau; \\ F_{01}(t) = k_y e^{\frac{k_x}{a_x} + \frac{k_y}{a_y} e^{a_y t_c}} \int\limits_{t_c}^{t} e^{a_y \tau - \frac{k_x}{a_x} e^{a_x \tau} - \frac{k_y}{a_y} e^{a_y \tau}} d\tau; \\ F_{11}(t) = e^{\frac{k_x}{a_x}\left(1 - e^{a_x t}\right) + \frac{k_y}{a_y}\left(e^{a_y t_c} - e^{a_y t}\right)}. \end{cases} \qquad (2)$$

При этом

$$B_x(t) = B_z + k_z e^{\frac{k_x}{a_x} + \frac{k_y}{a_y} e^{a_y t_c}} \int\limits_{t_c}^{t} e^{a_z \tau - \frac{k_x}{a_x} e^{a_x \tau} - \frac{k_y}{a_y} e^{a_y \tau}} d\tau. \qquad (3)$$

Отметим, что наиболее простое решение получается при $a_x = a_y = a$:

$$\begin{cases} F_{10}\left(t_c\right) = 1 - e^{\frac{k_x}{a}\left(1 - e^{a t_c}\right)} = A_0; \\ F_{01}\left(t_c\right) = 0; \\ F_{11}\left(t_c\right) = e^{\frac{k_x}{a_x}\left(1 - e^{a t_c}\right)} = A_1 \end{cases}$$

— в момент времени t_c открытия танком ответного огня;

$$\begin{cases} F_{10}\left(t\right) = 1 - \dfrac{k_y}{k_x + k_y} e^{\frac{k_x}{a}\left(1 - e^{a t_c}\right)} - \dfrac{k_x}{k_x + k_y} e^{\frac{k_x}{a}\left(1 - e^{a t}\right) + \frac{k_y}{a}\left(e^{a t_c} - e^{a t}\right)}; \\ F_{01}\left(t\right) = \dfrac{k_y}{k_x + k_y}\left(e^{\frac{k_x}{a}\left(1 - e^{a t_c}\right)} - e^{\frac{k_x}{a}\left(1 - e^{a t}\right) + \frac{k_y}{a}\left(e^{a t_c} - e^{a t}\right)}\right); \\ F_{11}\left(t\right) = e^{\frac{k_x}{a}\left(1 - e^{a t}\right) + \frac{k_x}{a}\left(e^{a t_c} - e^{a t}\right)} \end{cases}$$

— после открытия танком ответного огня $\left(t > t_c\right)$.

Вероятности окончательных состояний находят следующим образом:

$$\begin{cases} F_{10}(\infty) = 1 - \dfrac{k_y}{k_x + k_y} e^{\frac{k_x}{a}\left(1 - e^{at_c}\right)}; \\ F_{01}(\infty) = \dfrac{k_y}{k_x + k_y} e^{\frac{k_x}{a}\left(1 - e^{at_c}\right)}; \\ F_{11}(\infty) = 0. \end{cases}$$

Также отметим, что при $a_x = 0,\ a_z = 0,\ a_y \neq 0$ существенно упрощаются формулы для вычисления: $B_x(t_c) = \dfrac{k_z}{k_x}\left(1 - e^{-k_x t_c}\right)$.

Бой заканчивается в следующих случаях:

1) $F_{11}(t) = 0$ (одна из участвующих в бою единиц уничтожена);

2) $B_x(t_c) = B_0,\ F_{11}(t) \neq 0$ (ПТРК израсходовал свой боекомплект, при этом танк не уничтожен);

3) $t = \dfrac{D_{\text{нб}}}{v_t}, F_{11}(t) \neq 0$ (танк достигает позиции ПТРК), где $D_{\text{нб}}$ — дальность открытия огня ПТРК.

Анализ результатов расчетов. На основании формул (2) и (3) проведены расчеты. Исследовано влияние дальности $D_{\text{нб}}$ открытия огня ПТРК на исход боя. В качестве критерия C используем минимум математического ожидания затрат ПТРК на успешное проведение боевой операции, т. е.

$$C = \frac{(1 - P_{\text{п}})C_{\text{н.п.о}} + \text{Б}_x(t_{\text{ок}})C_{\text{р}}}{P_{\text{п}}},$$

где $P_{\text{п}}$ — вероятность победы ПТРК; $C_{\text{н.п.о}}$ — стоимость комплекта наземного пускового оборудования ПТРК; $t_{\text{ок}}$ — время окончания боя; $C_{\text{р}}$ — стоимость противотанковой управляемой ракеты (ПТУР).

Результаты расчетов показали, что в ряде случаев ПТРК нецелесообразно открывать огонь на максимальной дальности стрельбы. Так например, при значениях: $D_{\max}$ = 1200 м, t_c = 10 с, $v_{\text{т}}$ = 15 м/с, k_x = = 0,055, k_y = 0,03, k_z = 0,085, a_x = 0,006, a_y = 0,012, a_z = 0,004 при скорости танка $v_{\text{т}}$ = 15 м/с, B_0 = 2, $C_{\text{р}}$ = 1 условная единица, $C_{\text{н.п.о}}$ = = 10 условных единиц — наилучший результат достигается при дальности $D_{\text{нб}}$ = 590 м открытия огня ПТРК, причем величина C уменьшается более, чем на 3 % по сравнению со значением C, получаемым при дальности $D_{нб} = D_{max} =$ 1200 м (4,135 и 4,269) открытия огня ПТРК. Отметим, что при изменении $D_{нб}$ от 550 до 650 м C меняется не более, чем на 0,1 %. Наибольшее значение вероятности победы ПТРК $P_п$ достигается при $D_{нб}$ = 670 м, причем это изменение незначительно (не более, чем на 1% при изменении $D_{нб}$ от 450 м до 1000 м).

Приведенный пример показывает, что разработанную модель дуэльного боя можно использовать и при решении более общих военно-технических и военно-тактических задач. Поскольку открытие огня ПТРК на максимальной дальности нецелесообразно, дальность можно уменьшить. Тогда при той же массе ПТУР можно увеличить скорость полета ПТУР и бронепробиваемость (или мощность боевой части), что приведет к улучшению показателей боевой эффективности ПТРК. Таким образом, разработанную модель дуэльного боя можно применять при решении задачи нахождения оптимальных тактико-технических характеристик разрабатываемых образцов ПТРК, а также других видов вооружения и военной техники на начальных этапах проектирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чуев Ю.В.* Исследование операций в военном деле. М.: Воениздат, 1970. 276 с.
2. *Shanahan L.* Dynamics of Model Battles. New York: Physics Department, State University of New York, 2003. P. 1–43.
3. *Ильин В.А.* Моделирование боевых действий сил флота // Программные продукты и системы. 2006. № 1. С. 23–27.
4. *Ткаченко П.Н.* Математические модели боевых действий. М.: Сов. радио, 1969. 240 с.
5. *Jaswal N.K.* Military Operations Research. Quantitative Decision Making. Kluwer Academie Publishers, 2000. 338 p.
6. *Алексеев О.Г., Анисимов В.Г., Анисимов Е.Г.* Марковские модели боевых действий. М.: МО СССР, 1985. 85 с.
7. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. М.: Высш. шк., 1999. 576 с.
8. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. М.: УРСС, 2006. 432 с.
9. *Чуев В.Ю.* Вероятностная модель боя многочисленных группировок // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. Спец. вып. «Математическое моделирование». 2011. С. 223–232.

REFERENCES

[1] Chuev Yu.V. Issledovanie operatsiy v voennom dele [Research of operations in military affairs]. Moscow, Voenizdat Publ., 1970. 276 p.

[2] Shanahan L. Dynamics of Model Battles. N.Y., Physics Department, State University of New York, 2003. pp. 1–43.

[3] Ilyin V.A. Modeling of the Navy forces fighting. *Programmnye produkty i* sistemy [Software & Systems], 2006, no. 1, pp. 23–27 (in Russ.).

[4] Tkachenko P.N. Matematicheskie modeli boevykh deystviy [Mathematical models of combat operations]. Moscow, Sov. Radio Publ., 1969. 240 p.

[5] Jaswal N.K. Military Operations Research. Quantitative Decision Making. Kluwer Academie Publishers, 2000. 338 p.

[6] Alekseev O.G., Anisimov V.G., Anisimov E.G. Markovskie modeli boevykh deystviy [Markov models of combat operations]. Moscow, the Ministry of Defence of the USSR Publ., 1985. 85 p.
[7] Wentsel E.S. Teoriya veroyatnostey [Probability theory]. Moscow, Vyssh. shk. Publ., 1999. 576 p.
[8] Wentsel E.S. Issledovanie operatsiy [Research of operations]. Moscow, URSS Publ., 2006. 432 p.
[9] Chuev V.Yu. Probabilistic model of the battle of numerous groups. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki, Spetsvyp. "Matematicheskoe modelirovanie"* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci., Spec. Issue "Mathematical modeling"], 2011, pp. 223–232 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 08.04.2015

Чуев Василий Юрьевич — канд. техн. наук, доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Chuev V.Yu. — Cand. Sci. (Eng.), Assoc. Professor of Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Bauman Moscow State University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Дубограй Ирина Валерьевна — доцент кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5).

Dubogray I.V. — Assoc. Professor of Computational Mathematics and Mathematical Physics Department, Bauman Moscow State University (2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Вероятностная модель дуэльного боя с переменными эффективными скорострельностями // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2016. № 3. С. 118–124.
DOI: 10.18698/0236-3941-2016-3-118-124

Please cite this article in English as:

Chuev V.Yu., Dubogray I.V. Probabilistic Model of a Duel Combat with the Variable Effective Rate of Fire. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2016, no. 3, pp. 118–124. DOI: 10.18698/0236-3941-2016-118-124