

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕЦЕССИИ УПРУГОЙ ВОЛНЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА С НЕОДНОРОДНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПЛОТНОСТИ

О.С. Нарайкин^{1, 2}

Ф.Д. Сорокин¹

sorokin_fd@mail.ru

С.А. Козубняк^{1, 2}

Д.С. Вахлярский¹

¹ МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

² НИЦ «Курчатовский институт», Москва, Российская Федерация

Аннотация

Явление ухода волнового твердотельного гироскопа, вызванное неоднородным распределением плотности, исследовано прямым численным моделированием. Для вращающегося цилиндрического резонатора построена система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, решение которой найдено с использованием матричной экспоненты. Приведены примеры, наглядно демонстрирующие явление ухода при различных значениях параметра неоднородности распределения плотности

Ключевые слова

Волновой твердотельный гироскоп, цилиндрический резонатор, неоднородное распределение плотности, матричная экспонента, уход гироскопа

Поступила в редакцию 04.05.2017

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017

Введение. Волновые твердотельные гироскопы (ВТГ) благодаря удачному соотношению цены и точности находят широкое применение в различных областях техники: при бурении скважин, контроле качества автомобильных и железных дорог, в робототехнике, космонавтике, в навигационных системах водного, воздушного и наземного транспорта [1, 2] и др. Принцип работы ВТГ основан на эффекте инерции упругих волн колебаний, возбуждаемых в кольцевом, цилиндрическом или полусферическом резонаторах, при их вращении вокруг оси симметрии [3]. При равномерном вращении резонатора с угловой скоростью Ω вокруг оси симметрии упругая волна также поворачивается (прецессирует), но отстает от корпуса резонатора на величину $K\Omega$ (эффект Брайана [1–4]). Параметр K называют масштабным коэффициентом или коэффициентом прецессии [1–4]. Для кольцевого резонатора $K = 0,4$, для полусферического $K \approx 0,3$. Движение упругой волны относительно корпуса прибора удается зарегистрировать емкостными датчиками, что позволяет вычислить Ω .

При вращении резонатора с постоянной угловой скоростью упругая волна также должна поворачиваться вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью, однако наличие различных дефектов, искажающих динамическую симметрию прибора, приводит к отклонению угловой скорости волны от величины $K\Omega$. Возникает так называемое явление ухода гироскопа, ухудшающее

его точность. Уход гироскопа может быть вызван различными технологическими дефектами, наиболее существенными из которых являются искажение геометрической формы, а также неоднородность плотности, упругих свойств и толщины резонатора [2, 5–7].

Цель настоящей работы — численное исследование влияния неоднородного распределения плотности на уход гироскопа. Отметим, что обычно явление ухода исследуют аналитическими методами, что требует использования различных гипотез и предположений для упрощения анализа. В настоящей статье используются только гипотезы и предположения теории оболочек. Закон движения упругой волны предлагается находить непосредственным численным решением уравнений колебания цилиндрической оболочки с неоднородным распределением плотности во вращающейся системе координат. Для цилиндрической оболочки принимаются граничные условия Навье, как и в работах [6, 7], т. е. речь идет не о расчете конкретного резонатора, а об отработке методики численного анализа явления ухода.

Вывод уравнений движения вращающегося цилиндрического резонатора.

На рис. 1. показан общий вид резонатора и традиционные для цилиндра гауссовы координаты: s — осевая координата, φ — полярный угол.

Перемещения цилиндрической оболочки задавались в виде отрезков тригонометрического ряда:

$$\begin{aligned} u(s, \varphi, t) &= \left(\sum_{k=0}^n u_k^{(c)}(t) \cos k\varphi + \sum_{k=1}^n u_k^{(s)}(t) \sin k\varphi \right) \cos \frac{\pi s}{l}; \\ v(s, \varphi, t) &= \left(\sum_{k=1}^n v_k^{(c)}(t) \sin k\varphi - \sum_{k=0}^n v_k^{(s)}(t) \cos k\varphi \right) \sin \frac{\pi s}{l}; \\ w(s, \varphi, t) &= \left(\sum_{k=0}^n w_k^{(c)}(t) \cos k\varphi + \sum_{k=1}^n w_k^{(s)}(t) \sin k\varphi \right) \sin \frac{\pi s}{l}, \end{aligned} \quad (1)$$

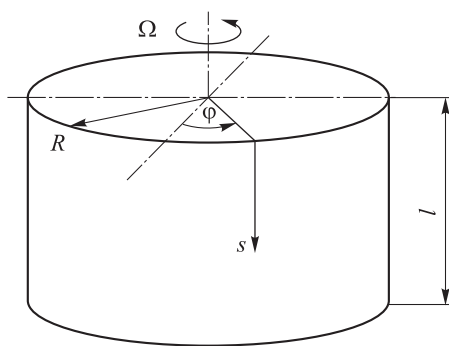


Рис. 1. Общий вид вращающегося резонатора

где u, v, w — осевое, окружное и нормальное перемещения соответственно; t — время; n — максимальный номер гармоники; индекс «с» относится к слагаемым, симметричным относительно нулевого меридиана ($\varphi = 0$); индекс «s» — к кососимметричным слагаемым.

Поскольку по координатам s и φ функции заданы, то движение оболочки полностью определяется коэффициентами рядов (1), которые удобно собрать в следующий вектор состояния:

$$y = \left(u_0^{(c)}, v_0^{(c)}, w_0^{(c)}, u_1^{(s)}, v_1^{(s)}, w_1^{(s)}, u_1^{(c)}, v_1^{(c)}, w_1^{(c)}, \dots, u_n^{(s)}, v_n^{(s)}, w_n^{(s)}, u_n^{(c)}, v_n^{(c)}, w_n^{(c)} \right)^T. \quad (2)$$

В векторе y содержится $6n + 3$ неизвестных функций, зависящих от времени.

Как показано в работе [8], тригонометрические функции $\cos \frac{\pi s}{l}$ и $\sin \frac{\pi s}{l}$ в (1) обеспечивают выполнение граничных условий Навье на торцах резонатора:

$$v = 0, w = 0, T_1 = 0, M_1 = 0, \tag{3}$$

где T_1 — осевое мембранное усилие; M_1 — интенсивность осевого изгибающего момента.

Для вывода уравнений движения резонатора воспользуемся уравнениями Лагранжа 2-го рода. Потенциальная энергия деформации цилиндрической оболочки равна [8]

$$U = \int_0^l \int_0^{2\pi} \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \left[(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 + 2(1-\mu) \left(\frac{\gamma_{12}^2}{4} - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \right) \right] ds R d\varphi + \int_0^l \int_0^{2\pi} \frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} \left[(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + 2(1-\mu) (\alpha_{12}^2 - \alpha_1 \alpha_2) \right] ds R d\varphi, \tag{4}$$

где E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала резонатора; h — толщина; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}$ — осевая, окружная и сдвиговая деформации; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}$ — параметры приращения кривизны.

Для деформаций и параметров приращения кривизны справедливы обычные формулы из [8]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial s}; & \alpha_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right); & \alpha_2 &= \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right); \\ \gamma_{12} &= \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial u}{R \partial \varphi}; & \alpha_{12} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \varphi} \right). \end{aligned} \tag{5}$$

Подставляя суммы (1) в формулы (5) и далее в выражение (4), можно представить потенциальную энергию деформации в виде квадратичной формы

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{y}^T [\mathbf{K}] \mathbf{y}, \tag{6}$$

где $[\mathbf{K}]$ — матрица жесткости.

При этом определенные интегралы по координатам s и φ вычислялись аналитически с помощью стандартных средств математического пакета Wolfram Mathematica [9]. Символьные вычисления позволяют при необходимости представить матрицу $[\mathbf{K}]$ полностью в аналитическом виде, хотя такое представление является весьма громоздким.

Кинетическая энергия резонатора была получена на основе представления полного движения оболочки как наложение относительного движения на переносное вращение с постоянной угловой скоростью Ω :

$$T = \int_0^l \int_0^{2\pi} \frac{\rho h}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \Omega w \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \Omega v \right)^2 \right] ds R d\varphi, \quad (7)$$

где ρ — плотность материала резонатора.

Слагаемые, содержащие производные перемещений в первой степени, удалены из формулы (7), поскольку они все равно исчезнут при формировании уравнения Лагранжа 2-го рода. В реальном резонаторе распределение плотности определить очень трудно, поэтому параметр ρ в формуле (7) должен рассматриваться как приведенная величина, имитирующая реальное распределение массы. Например, если на небольшом участке поверхности нанесен дополнительный материал (в процессе балансировки [2, 10, 11]), то увеличение массы на данном участке можно учесть условным увеличением плотности ρ .

Известно [2, 11], что на уход гироскопа сильнее всего влияет четвертая гармоника неоднородности распределения плотности (при колебаниях с волновым числом 2), поэтому зависимость плотности от полярного угла зададим в следующем виде:

$$\rho = (1 + \alpha \cos 4(\varphi - \varphi_0)) \rho_0, \quad (8)$$

где α — малый параметр; φ_0 — угол ориентации формы несовершенства относительно оси координат; ρ_0 — среднее значение плотности.

Подстановка сумм (1) в формулу (7) с последующим вычислением определенных интегралов средствами пакета Wolfram Mathematica позволяет представить кинетическую энергию в следующем виде:

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^T [\mathbf{M}] \left(\frac{dy}{dt} \right) - \frac{1}{2} \mathbf{y}^T [\mathbf{C}] \left(\frac{dy}{dt} \right), \quad (9)$$

где $[\mathbf{M}]$ — матрица масс; $[\mathbf{C}]$ — кососимметричная матрица гироскопических коэффициентов.

Уравнения движения формировались обычным образом, т. е. подстановкой выражений для энергий (6) и (9) в уравнение Лагранжа 2-го рода. В векторно-матричной форме уравнения движения имеют вид

$$[\mathbf{M}] \frac{d^2 \mathbf{y}}{dt^2} + [\mathbf{C}] \frac{d\mathbf{y}}{dt} + [\mathbf{K}] \mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (10)$$

Численное решение уравнений движения вращающегося цилиндра. Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений (10) является весьма «жесткой», поэтому обычные компьютерные программы численного интегрирования дифференциальных уравнений (например, NDSolve из пакета Wolfram Mathematica) практически непригодны для ее решения. Результат либо получается с чрезвычайно большими погрешностями, либо (при включении опций, учитывающих жесткость системы) время расчета становится неприемлемо большим.

С учетом того, что все коэффициенты в системе являются постоянными, был применен полуаналитический метод матричной экспоненты [12]. С помощью введения вектора обобщенных скоростей \mathbf{v} система (10) была представлена в каноническом виде

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = [\mathbf{A}]\mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} [\mathbf{0}] & [\mathbf{E}] \\ -[\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{K}] & -[\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{C}] \end{pmatrix}.$$

Согласно теории дифференциальных уравнений, решение системы (11) можно представить через матричную экспоненту [12]:

$$\mathbf{Y}(t) = \exp([\mathbf{A}]t) \mathbf{Y}_0, \quad (12)$$

где \mathbf{Y}_0 — вектор начальных условий.

Под матричной экспонентой в (12) подразумевается матричный степенной ряд, аналогичный степенному ряду для обычной функции — экспоненты. Метод решения, основанный на использовании аналитического выражения (12), не приводит к численным проблемам, так как вычисление матричной экспоненты в пакете Wolfram Mathematica (функция MatrixExp) может проводиться практически с неограниченным количеством десятичных знаков (500 знаков и более).

Для определения постоянных интегрирования было сделано предположение о том, что в начальный момент времени в оболочке реализована стоячая волна

$$\begin{aligned} u_2^{(c)}(0) &= u_2^*, \\ v_2^{(c)}(0) &= v_2^*, \\ w_2^{(c)}(0) &= w_2^*, \end{aligned} \quad (13)$$

где u_2^* , v_2^* , w_2^* — амплитудные значения перемещений для формы колебаний оболочки без дефекта и при отсутствии вращения ($\alpha = 0$, $\Omega = 0$).

Остальные компоненты вектора $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}(0)$, кроме заданных соотношениями (13), принимались равными нулю. Таким образом, оказалось, что численное интегрирование в рассматриваемой задаче можно полностью заменить операциями с матрицами и векторами, которые уже реализованы в пакете Wolfram Mathematica.

Численный пример и анализ результатов. Далее приведены результаты применения предлагаемой методики для исследования прецессии упругой волны в цилиндрическом резонаторе с неоднородным распределением плотности. Параметры резонатора следующие: модуль упругости $E = 73600$ МПа; плотность $\rho = 2210$ кг/м³; коэффициент Пуассона $\mu = 0,17$; радиус срединной поверхности $R = 40$ мм; длина $l = 80$ мм; толщина $h = 1$ мм; малый параметр возмущения плотности $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$; $2 \cdot 10^{-4}$; $2 \cdot 10^{-5}$; собственная частота $f_2 = 7951,8$ Гц для формы

$\cos 2\varphi$ при $\alpha = 0$; расщепление частоты $\Delta f_2 = 5,20$ и $0,520$ Гц при $\Omega = 0$, $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ и $2 \cdot 10^{-4}$; масштабный коэффициент $K = 0,374$; угловая скорость вращения оболочки $\Omega = 20$ рад/с; максимальный номер гармоники $n = 5 \dots 10$.

Алгоритм вычисления расщепления частоты Δf_2 заключался в нахождении всего спектра собственных значений матрицы $[A]$ из системы (11) с последующим выделением из него двух собственных частот, близких к f_2 . При значении параметра $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ указанные частоты составляют 7954,437 Гц и 7949,236 Гц, что и дает для Δf_2 приведенное ранее значение 5,20 Гц.

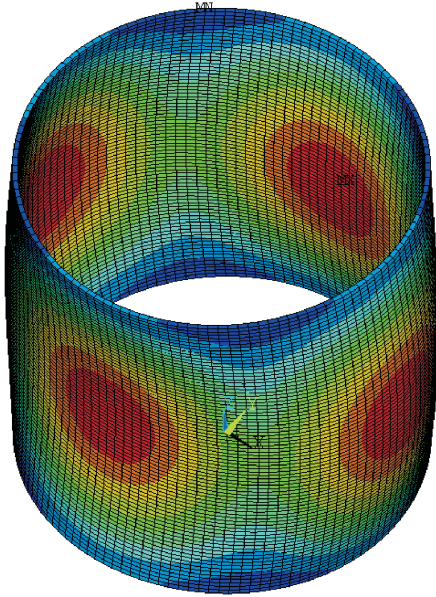


Рис. 2. Конечно-элементная модель резонатора и одна из форм колебаний, соответствующая гармонике с волновым числом $k = 2$

Контроль расчета собственных частот осуществлялся на основе МКЭ. В комплексе ANSYS была создана модель цилиндрического резонатора (рис. 2), состоящая из 10 240 оболочечных элементов (128 элементов по окружному направлению и 80 по оси оболочки).

Модель цилиндрической оболочки закреплялась в соответствии с граничными условиями (3), т. е. были запрещены только радиальные и окружные перемещения. Конечно-элементный расчет для волнового числа $k = 2$ дает две формы колебаний (см. рис. 2), развернутые относительно друг друга на угол 45° , которым соответствуют две близкие собственные частоты 7949,578 и 7954,772 Гц, что соответствует расщеплению 5,19 Гц. Весьма любопытно, что конечно-элементный расчет привел к другим значениям искомым собственным частот, чем система (11), но к тому же значению расщепления, которое приведено

ранее. Расхождение вычисленных собственных частот легко объяснить различием в гипотезах теории оболочек, принятых в [8] и разработчиками комплекса ANSYS. Но эффект совпадения значений расщепления, найденных из системы (11) и МКЭ, при наличии заметных отличий в самих частотах требует дополнительного рассмотрения и выходит за рамки настоящей статьи.

Масштабный коэффициент был найден по расщеплению частоты резонатора, вызванному вращением. Для оболочки без дефекта при заданной угловой скорости Ω собственная частота расщепляется на две близкие частоты, разность между которыми составляет $\Delta f_2^* = 4,765$ Гц. Масштабный коэффициент равен

$$K = \frac{2\pi\Delta f_2^*}{4\Omega} = 0,374.$$

Решение, представленное формулой (12), для оболочки без дефекта ($\alpha = 0$) описывает всего лишь эффект Брайана, что видно по положению упругой волны в равноотстоящие моменты времени (рис. 3, а, б, в).

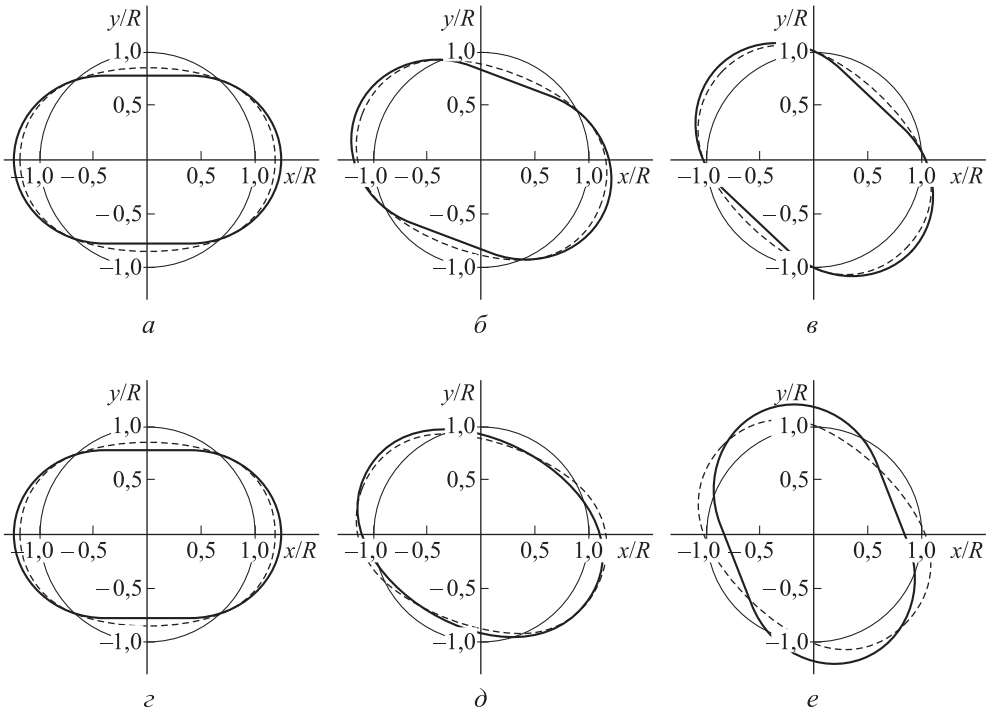


Рис. 3. Положение упругой волны при $s = l / 2$ в моменты времени $t = 0, t = 400 / f_2, t = 800 / f_2$ (а, б, в — дефект отсутствует; г, д, е — параметр дефекта $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$)

Для сравнения на рис. 3 штриховой линией в несколько отличном масштабе показано теоретическое решение, т. е. график функции $\cos(2(\varphi + K\Omega t))$. Численное решение показывает, что в системе координат, связанной с корпусом, упругая волна прецессирует относительно него с постоянной угловой скоростью $K\Omega$ в направлении, противоположном вращению корпуса.

В случае наличия дефекта $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ упругая волна прецессирует неравномерно (рис. 3, г, д, е) и при этом опережает теоретическое решение.

Знание параметра дефекта плотности $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ выбрано довольно большим для того, чтобы повысить наглядность рисунка. При меньших значениях параметра α разность в положении овалов, изображенных штриховой и сплошной линиями, будет практически незаметна. Поэтому при меньших значениях дефекта вычисляли угловое положение экстремума функции w через целое число периодов колебаний и сравнивали его с теоретическим, т. е. уход гироскопа по найденному решению (12) был рассчитан следующим образом:

$$\vartheta = \varphi \Big|_{w_{\max}} + K\Omega t. \tag{14}$$

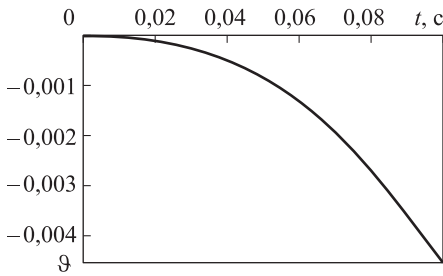


Рис. 4. Уход гироскопа (параметр дефекта $\alpha = 2 \cdot 10^{-4}$)

Угловое положение экстремума функции w в соотношении (14), ближайшее к $\varphi = -K\Omega t$, также определялось численно. На рис. 4 показана зависимость ухода гироскопа от времени при наличии дефекта плотности с параметром $\alpha = 2 \cdot 10^{-4}$.

Как и ожидалось, для $\vartheta(t)$ получилась зависимость, близкая к квадратичной, аналогичная рассчитанной аналитически в [11]. Для контроля все расчеты проводились при двух значениях максимального номера гармоники $n = 5$ (66 дифференциальных уравнений) и $n = 10$ (126 дифференциальных уравнений), результаты при этом получились одинаковыми, но увеличение числа гармоник требует существенного увеличения точности вычисления матричной экспоненты.

Несложно показать численно, что эффект ухода гироскопа пропорционален квадрату расщепления собственной частоты. Для этого был вычислен уход гироскопа $\vartheta(t_0)$ в фиксированный момент времени $t_0 = 0,1$ с в зависимости от расщепления собственной частоты Δf_2 . Получены следующие результаты: для $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ $\Delta f_2 = 5,20$ Гц и $\vartheta(t_0) = -4,56882 \cdot 10^{-1}$ рад; для $\alpha = 2 \cdot 10^{-4}$ $\Delta f_2 = 0,520$ Гц и $\vartheta(t_0) = -4,25281 \cdot 10^{-3}$ рад; для $\alpha = 2 \cdot 10^{-5}$ $\Delta f_2 = 0,052$ Гц и $\vartheta(t_0) = -4,24436 \cdot 10^{-5}$ рад.

Видно, что при уменьшении расщепления собственной частоты Δf_2 в 10 раз уход гироскопа уменьшается примерно в 100 раз, что полностью соответствует аналитическим расчетам из работы [11]. Это наблюдение еще раз подтверждает важность балансировки ВТГ именно по четвертой гармонике дефекта распределения плотности.

Выводы. 1. Предложен прием прямого численного моделирования, основанный на построении матриц масс, жесткости и гироскопических коэффициентов с последующим применением полуаналитического метода матричной экспоненты, для исследования явления ухода волнового твердотельного гироскопа, вызванного неоднородным распределением плотности.

2. Приведенная методика подтверждает эффект Брайана при отсутствии дефекта плотности.

3. Для резонатора с неоднородным распределением плотности удастся сравнительно просто рассчитать явление ухода без привлечения асимптотических методов, при этом наблюдается квадратическая зависимость угла ухода от расщепления частоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Миниатюрные волновые твердотельные гироскопы для малых космических аппаратов* / М.А. Басараб, Б.С. Лунин, В.А. Матвеев, А.В. Фомичев, Е.А. Чуманкин, А.В. Юрин // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2014. № 4. С. 80–96.

2. *Матвеев В.А., Лунин Б.С., Басараб М.А.* Навигационные системы на волновых твердотельных гироскопах. М.: Физматлит, 2008. 240 с.
3. *Дзама М.А., Егармин Н.Е.* Прецессия упругих волн при вращении некоторых классов осесимметричных оболочек // Известия РАН. Механика твердого тела. 1991. № 1. С. 170–175.
4. *Меркурьев И.В., Подалков В.В.* Динамика микромеханического и волнового твердотельного гироскопов. М.: Физматлит, 2009. 228 с.
5. *Донник А.С.* Влияние геометрической неоднородности и упругой анизотропии материала на точностные характеристики волнового твердотельного гироскопа: Дис. ... канд. техн. наук. М.: МЭИ, 2006. 131 с.
6. *Вахлярский Д.С., Гуськов А.М., Басараб М.А., Матвеев В.А.* Использование метода конечных элементов совместно с методом возмущений в задаче вычисления расщепления частоты оболочки с дефектом формы срединной поверхности // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2016. № 5. С. 152–174. DOI: 10.7463/0516.0839190 URL: <http://technomag.bmstu.ru/doc/839190.html>
7. *Козубняк С.А.* Расщепление собственных частот колебаний цилиндрического резонатора волнового твердотельного гироскопа, вызванное возмущением формы // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2015. № 3. С. 39–49. DOI: 10.18698/0236-3933-2015-3-39-49
8. *Бидерман В.Л.* Механика тонкостенных конструкций. Статика. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
9. *Дьяконов В.П.* Mathematica 5.1/5.2/6. Программирование и математические вычисления. М.: ДМК-Пресс, 2008. 574 с.
10. *Матвеев В.А., Басараб М.А., Лунин Б.С.* Аппроксимация распределения плотности резонатора волнового твердотельного гироскопа по измеренным параметрам дебаланса // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2015. № 10. С. 9–16.
11. *Матвеев В.А., Липатников В.И., Алехин А.В.* Проектирование волнового твердотельного гироскопа. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 168 с.
12. *Беляев Ю.Н.* Методы вычисления матриц переноса упругих деформаций // Вестник ПНИПУ. Механика. 2013. № 3. С. 63–110.

Нарайкин Олег Степанович — д-р техн. наук, профессор, чл.-корр. РАН, заведующий кафедрой «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1); вице-президент НИЦ «Курчатовский институт» (Российская Федерация, 123182, Москва, пл. Академика Курчатова, д. 1).

Сорокин Фёдор Дмитриевич — д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Козубняк Светлана Аркадьевна — старший преподаватель кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1); сотрудник НИЦ «Курчатовский институт» (Российская Федерация, 123182, Москва, пл. Академика Курчатова, д. 1).

Вахлярский Дмитрий Сергеевич — аспирант кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Нарайкин О.С., Сорокин Ф.Д., Козубняк С.А., Вахлярский Д.С. Численное моделирование прецессии упругой волны в цилиндрическом резонаторе волнового твердотельного гироскопа с неоднородным распределением плотности // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2017. № 5. С. 41–51. DOI: 10.18698/0236-3941-2017-5-41-51

**NUMERICAL SIMULATION OF ELASTIC WAVE PRECESSION
IN THE CYLINDRICAL RESONATOR OF A HEMISPHERICAL RESONATOR
GYROSCOPE FEATURING A NON-HOMOGENEOUS DENSITY
DISTRIBUTION**

O.S. Naraykin^{1,2}

F.D. Sorokin¹

sorokin_fd@mail.ru

S.A. Kozubnyak^{1,2}

D.S. Vakhlyarskiy¹

¹ Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

² National Research Centre Kurchatov Institute, Moscow, Russian Federation

Abstract

We employ direct numerical simulation to investigate the phenomenon of drift in a hemispherical resonator gyroscope, caused by non-homogeneous density distribution. We described a rotating cylindrical resonator by a system of ordinary differential equations with constant coefficients and found the solution to the system using a matrix exponential. We provide examples that illustrate the drift phenomenon for various values assumed by the non-homogeneity parameter of the density distribution

Keywords

Hemispherical resonator gyroscope, cylindrical resonator, non-homogeneous density distribution, matrix exponential, gyroscope drift

REFERENCES

- [1] Basarab M.A., Lunin B.S., Matveev V.A., Fomichev A.V., Chumankin E.A., Yurin A.V. Miniature gyroscope based on elastic waves in solids for small spacecraft. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2014, no. 4, pp. 80–96 (in Russ.).
- [2] Matveev V.A., Lunin B.S., Basarab M.A. Navigatsionnye sistemy na volnovykh tverdotel'nykh giroskopakh [Navigation system on the wave solid-state gyroscopes]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2008. 240 p.
- [3] Dzama M.A., Egarmin N.E. Precession of elastic waves during the rotation of certain classes of axisymmetric shells. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 1991, no. 1, pp. 170–175 (in Russ.).
- [4] Mercuriev I.V., Podalkov V.V. Dinamika mikromekhanicheskogo i volnovogo tverdotel'nogo giroskopov [Dynamics of micromechanical and wave solid-state gyroscopes]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009. 228 p.
- [5] Donnik A.S. Vliyaniye geometricheskoy neodnorodnosti i uprugoy anizotropii materiala na tochnostnye kharakteristiki volnovogo tverdotel'nogo giroskopa: dis. kand. tekhn. nauk [Influence of material geometrical heterogeneity and elastic anisotropy on the accuracy of the wave solid-state gyroscope characteristics: kand. tech. sci. diss.]. Moscow, MEI Publ., 2006. 131 p.

[6] Vakhlyarskiy D.S., Guskov A.M., Basarab M.A., Matveev V.A. Using a combination of fem and perturbation method in frequency split calculation of a nearly axisymmetric shell with middle surface shape defect. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education: Scientific Publication of BMSTU], 2016, no. 5, pp. 152–174 (in Russ.). DOI: 10.7463/0516.0839190

Available at: <http://techomag.bmstu.ru/doc/839190.html>

[7] Kozubnyak S.A. Splitting of natural frequencies of cylindrical resonator gyro due to non-ideal shape. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Priborostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Instrum. Eng.], 2015, no. 3, pp. 39–49 (in Russ.).

DOI: 10.18698/0236-3933-2015-3-39-49

[8] Biderman V.L. *Mekhanika tonkostennykh konstruksiy. Statika* [Thin-walled structure mechanics. Statics]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1977. 488 p.

[9] D'yakonov V.P. *Mathematica 5.1/5.2/6. Programmirovaniye i matematicheskie vychisleniya* [Mathematica 5.1/5.2/6. Programming and mathematical calculations]. Moscow, DMK-Press Publ, 2008. 574 p.

[10] Matveyev V.A., Basarab M.A., Lunin B.S. Approximation of density distribution of solid-state wave gyro resonator with respect to measured disbalance parameters. *Pribory i sistemy. Upravleniye, kontrol', diagnostika* [Instruments and Systems: Monitoring, Control, and Diagnostics], 2015, no. 10, pp. 9–16.

[11] Matveev V.A., Lipatnikov V.I., Alekhin A.V. *Proektirovaniye volnovogo tverdotel'nogo giroskopa* [Design of the hemispherical resonator gyro]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1998. 168 p.

[12] Belyaev Yu.N. Methods for computing a transfer matrices of elastic deformations. *Vestnik PNIPU. Mekhanika* [PNRPU Mechanics Bulletin], 2013, no. 3, pp. 63–110 (in Russ.).

Naraykin O.S. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Head of Applied Mechanics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation); Vice President, National Research Centre Kurchatov Institute (Akademika Kurchatova ploschad 1, Moscow, 123182 Russian Federation).

Sorokin F.D. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Applied Mechanics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Kozubnyak S.A. — Assist. Professor, Applied Mechanics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation); Member of the National Research Centre Kurchatov Institute (Akademika Kurchatova ploschad 1, Moscow, 123182 Russian Federation).

Vakhlyarskiy D.S. — post-graduate student, Applied Mechanics Department, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Naraykin O.S., Sorokin F.D., Kozubnyak S.A., Vakhlyarskiy D.S. Numerical Simulation of Elastic Wave Precession in the Cylindrical Resonator of a Hemispherical Resonator Gyroscope Featuring a Non-Homogeneous Density Distribution. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinostr.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2017, no. 5, pp. 41–51. DOI: 10.18698/0236-3941-2017-5-41-51