УДК 531.01:629.78 DOI: 10.18698/0236-3941-2020-1-42-55

# АНАЛИЗ ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ КОНСТРУКЦИЙ РАКЕТНО-КОСМИЧЕСКОЙ ТЕХНИКИ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ НАГРУЗКАХ

**О.Н. Тушев** tushev49@bk.ru
**А.В. Беляев** beliaev@bmstu.ru
**Ван Ичжоу**

**МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация**

**Аннотация**

Методы стохастического анализа реакции механической системы на внешние случайные воздействия обычно применяются на этапе проектирования конструкций для ракетной и космической техники. Актуальность темы связана с высокими требованиями надежности космических аппаратов. Разработана методика вероятностной оценки динамических свойств конструкции при совместном действии на ее элементы внешних (аддитивных) и параметрических (мультипликативных) вибраций. Колебания упругой конструкции описаны обыкновенным дифференциальным векторным нелинейным уравнением. Нелинейные позиционные и скоростные характеристики кинематических связей могут иметь изломы и разрывы. Введено допущение, что вероятностные разбросы значений соответствующих фазовых координат близки к нормальным законам распределения плотности вероятности. Исходные нелинейные уравнения колебаний статистически линеаризованы. Система дифференциальных уравнений не преобразована в каноническую форму, поэтому вероятностный анализ системы можно выполнить для любого внешнего нестационарного воздействия. Вектор математических ожиданий и матрица корреляционных функций вектора фазовых координат находятся с помощью фундаментальной матрицы линеаризованной системы. Решение состоит из матричного интегростепенного ряда, содержащего линейные и квадратичные члены. Применение методики позволяет оценить вклад каждой составляющей внешних воздействий в общий результат. В качестве примера рассмотрена реакция нелинейной системы на ступенчатое внешнее нестационарное действие

**Ключевые слова**

*Уравнения вынужденных колебаний, стохастический анализ, аддитивные и мультипликативные воздействия, статистическая линеаризация, интегростепенной ряд, фундаментальная матрица, мультипликативный интеграл*

Поступила 15.04.2019
Принята 13.06.2019


*Работа поддержана грантом РФФИ № 20-08-01076а*

**Введение.** Создание космических аппаратов для многолетней автономной работы в экстремальных условиях космического полета сопряжено с повышенной степенью риска и требует больших финансовых затрат. Например, стоимость космического аппарата связи AngoSat-1, потерянного в 2018 г., превышала 1,5 млрд рублей ($ 252 млн) [1]. Недостаточная надежность изделий сдерживает развитие отечественной ракетно-космической техники и негативно влияет на ее имидж.

Внешние воздействия, связанные с механическим нагружением конструкции космического аппарата, имеют случайный характер. К ним относятся, например, нестационарные нагрузки на этапе выведения или при запуске двигателя разгонного блока. Поэтому разработка методики анализа реакции нелинейной механической системы на нестационарные случайные воздействия является актуальной задачей, имеющей практическую направленность.

Исследование стойкости космического аппарата к механическим нагрузкам содержит анализ динамических процессов, близких к режимам при натурных условиях эксплуатации. Расчетные методики позволяют оценить поведение конструкции при параметрических и внешних воздействиях [2–4]. Вероятностные характеристики элементов упруго-массовой модели изделия и внешней нагрузки используются для проведения стохастического анализа. Результаты расчетов призваны сократить сроки и повысить достоверность экспериментальной отработки конструкции космического аппарата [5, 6].

**Постановка задачи.** Способы анализа динамического поведения нелинейной конечномерной модели конструкции при аддитивных нестационарных нагрузках достаточно широко описаны в литературе [7, 8]. Наибольший интерес представляет рассмотрение совместного воздействия аддитивных и параметрических вибраций. Решение такой задачи в детерминированной и стохастической постановках отражено в публикациях [9, 10]. При этом часто допускается, что спектр внешних воздействий является высокочастотным по отношению к собственным частотам исследуемого объекта. Тогда основную опасность представляет медленное движение, определяемое математическим ожиданием фазовых координат, которое включает вибрационные составляющие. Примером тому является классическая задача «ухода» маятника при косой вибрации точки подвеса [11]. Вместе с тем в реальных задачах спектры внешних воздействий оказываются часто широкополосными и эффект фильтрации вибраций самой системой отчетливо проявляется только для высокочастотной части спектра. Таким образом, определение уровня вибраций в окрестности медленного движения является не менее важной задачей для достоверной оценки динамики и прочности конструкции. Настоящая работа посвящена именно этому вопросу и является обобщением результатов, опубликованных в [12]. В рамках корреляционной теории рассматриваются нестационарные комбинированные нагрузки на нелинейную систему.

Считаем, что динамика системы определяется векторным дифференциальным уравнением в форме Коши:

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}_2(t)\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{A}_1(t); \\ &\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $\mathbf{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)^{\mathrm{т}}$ — вектор фазовых координат; $\mathbf{A}_2(t)$ — матрица случайных мультипликативных воздействий; $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ — статистически линеаризованная зависимость; $\mathbf{A}_1(t)$ — вектор случайных аддитивных воздействий; $\mathbf{X}_0$ — детерминированный начальный вектор.

Для удобства обозначений будем считать, что элементы $a_{ij}(t)$, $\forall i, j$ матрицы $\mathbf{A}_2(t)$ и $a_i(t)$ вектора $\mathbf{A}_1(t)$ составляют единый вектор $\mathbf{A}(t)$ с элементами $a_k(t)$, где $k = 1, 2, ..., m$ $(m = n^2 + n)$. Элементы с номерами $1, 2, ..., n^2$ — мультипликативные составляющие, пронумерованные построчно, а элементы с номерами $n^2 + 1, ..., m$ — аддитивные. Вектор $\mathbf{A}(t)$ задан вектором математических ожиданий $\mathbf{M}_A(t)$ и матрицей корреляционных функций $\mathbf{K}_A(t, t')$.

**Метод решения.** Статистически линеаризованная зависимость в общем виде записывается следующим образом [13]:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{L}(\mathbf{M}_X(t), \mathbf{K}_X(t), t) + \mathbf{R}(\mathbf{M}_X(t), \mathbf{K}_X(t), t)\mathbf{X}^0, \qquad (2)$$

где $\mathbf{L}(t)$ — векторная статистическая характеристика по математическому ожиданию; $\mathbf{M}_X(t)$ и $\mathbf{K}_X(t)$ — вектор математических ожиданий и матрица корреляционных моментов вектора $\mathbf{X}$; $\mathbf{R}(t)$ — матрица статистических коэффициентов по центрированному вектору $\mathbf{X}^0$.

Различие в обозначениях матриц корреляционных функций $\mathbf{K}_X(t, t')$ и корреляционных моментов $\mathbf{K}_X(t)$, а также их элементов заключается только в числе аргументов.

Элементы вектора $\mathbf{L}(\mathbf{M}_X(t), \mathbf{K}_X(t), t)$ и матрицы $\mathbf{R}(\mathbf{M}_X(t), \mathbf{K}_X(t), t)$ определяются конкретным типом нелинейностей и для большинства вариантов, встречающихся на практике, приводятся во многих книгах, например [8]. Подставив (2) в уравнение (1), с учетом равенства $\mathbf{X}^0 = \mathbf{X} - \mathbf{M}_X$ и условно исключив несущественные для текущих выкладок аргументы, получим

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}_2\mathbf{R}\mathbf{X} + \mathbf{A}_2\mathbf{Q} + \mathbf{A}_1, \tag{3}$$

где

$$\mathbf{Q} = \mathbf{L} - \mathbf{R}\mathbf{M}_X. \tag{4}$$

В работе [12] использовался упрощенный вариант статистической линеаризации, в котором допускается, что $\mathbf{Q} \equiv 0.$ Такое упрощение возможно, но оно не носит принципиального характера и здесь не применяется. Отметим, что наличие мультипликативной составляющей не позволяет провести обычное при статистической линеаризации преобразование (4) в два удобных уравнения относительно $\mathbf{M}_X$ и $\mathbf{X}^0$. Выполним формальное преобразование неоднородного уравнения (3) к однородному уравнению путем расширения размерности фазового пространства на единицу. Дополним векторное уравнение (3) тривиальными скалярными уравнениями $\dot{x}_{n+1} = 0;$ $x_{n+1}\left(t_0\right) = 1$. Тогда, оставив прежнее обозначение для вектора фазовых координат, получим

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{G}(t)\mathbf{X}, \tag{5}$$

где

$$\mathbf{X} = \left(x_1, x_2, ..., x_{n+1}\right)^{\mathrm{т}}; \quad \mathbf{X}_0 = \left(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}, 1\right)^{\mathrm{т}}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2\mathbf{R} & \mathbf{A}_2\mathbf{Q} + \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{O}_n^1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Введем следующее обозначение для нулевой матрицы $\mathbf{O}_{s_1}^{s_2}$, где $s_1$ — число столбцов, $s_2$ — число строк. Следовательно, $\mathbf{O}_n^1$ — вектор-строка, $\mathbf{O}_n^n$ — матрица размера $n \times n$. Нетрудно убедиться, что уравнения (3) и (5) различаются только по форме, а по существу идентичны.

Запишем решение уравнения (5) в виде

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{G})\mathbf{X}_0,$$

где $\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{G})$ — фундаментальная матрица, определяемая на отрезке времени $\left[t_0, t\right]$. Представим матрицу $\mathbf{G}$ в виде суммы двух матриц, одна из которых зависит только от математических ожиданий, а вторая — от центрированных составляющих:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_2\mathbf{R} & \mathbf{M}_2\mathbf{Q} + \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{O}_n^1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2^0\mathbf{R} & \mathbf{A}_2^0\mathbf{Q} + \mathbf{A}_1^0 \\ \mathbf{O}_n^1 & 0 \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{M}_2$ и $\mathbf{M}_1$ — матрица и вектор математических ожиданий аддитивных и мультипликативных воздействий.

Используя известное преобразование фундаментальной матрицы от суммы двух матриц [15], получаем

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{U})\,\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{D})\mathbf{X}_0, \tag{6}$$

где

$$\mathbf{D}(t) = \left[\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{U})\right]^{-1}\mathbf{V}(t)\,\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{U}). \tag{7}$$

В работе [15] показано, что любую фундаментальную матрицу можно разложить в интегростепенной ряд. При этом он абсолютно и равномерно сходится на любом замкнутом интервале изменения аргумента $t$, если элементы матрицы коэффициентов ограничены и имеют конечное число разрывов на участке интегрирования. После разложения $\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{D})$ в такой ряд выражение (6) трансформируется к виду

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{U})\left(\mathbf{E} + \int_{t_0}^{t}\mathbf{D}(\tau)\,d\tau + \int_{t_0}^{t}\mathbf{D}(\tau')\int_{t_0}^{\tau'}\mathbf{D}(\tau)\,d\tau\,d\tau' + \ldots\right)\mathbf{X}_0, \tag{8}$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица. Ограничимся в (8), как и в дальнейших выкладках, квадратичным приближением. Осреднение выражения (8) с учетом, что $M[\mathbf{D}(t)] \equiv 0$, приводит к следующему соотношению:

$$\mathbf{M}_X(t) = \mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{U})\mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau'}\mathbf{M}\left[D(\tau')\,D(\tau)\right]d\tau\,d\tau'\mathbf{X}_0. \tag{9}$$

Известно, что матрицу корреляционных функций можно выразить следующим образом:

$$\mathbf{K}_X(t, t') = \mathbf{M}\left[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(t')\right] - \mathbf{M}_X(t)\,\mathbf{M}_X^{\mathrm{T}}(t'). \tag{10}$$

В соответствии с формулой (10) получаем матрицу корреляционных функций в следующем виде:

$$\mathbf{K}_X(t,t') = \mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{U})\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t'}\mathbf{M}\left[D(\tau)\,\mathbf{X}_0\,\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\,D^{\mathrm{T}}(\tau')\right]d\tau\,d\tau'\left(\mathbf{\Omega}_{t_0}^{t'}(\mathbf{U})\right)^{\mathrm{T}}. \tag{11}$$

Теперь необходимо представить соотношения (9) и (11) в явном виде от элементов $k_{ij}^{(\mathbf{A})}\left(t,\,t'\right)$ матрицы $\mathbf{K_A}\left(t,\,t'\right)$. Для этого используем так называемую матричную единицу $\mathbf{J}_{ij}$ — матрицу со всеми нулевыми элементами, за исключением элемента с номером *ij*, равного единице. Нумерация элементов может быть любой, например, при сквозной построчной нумерации элементов матрицы — $\mathbf{J}_i$, $i=1,\,2,\,...,\,n$. Разложим вектор $\mathbf{A}_1^0(t)$ и матрицу $\mathbf{A}_2^0(t)$ по матричным единицам:

$$\mathbf{A}_1^0(t)=\sum_{i=1}^{n}a_i^0(t)\mathbf{J}_i\,;\quad \mathbf{A}_2^0(t)=\sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}^0(t)\mathbf{J}_{ij}\,.$$

Для объединенного вектора $\mathbf{A}^0(t)$ имеем

$$\mathbf{A}^0(t)=\sum_{i=1}^{m}a_i^0(t)\mathbf{J}_i\,.$$

Тогда матрица $\mathbf{V}$ может быть представлена в следующем виде:

$$\mathbf{V}=\sum_{i,\,j=1}^{n}a_{ij}^0\begin{bmatrix}\mathbf{J}_{ij}\mathbf{R} & \mathbf{J}_{ij}\mathbf{Q}\\ \mathbf{O}_1^n & 0\end{bmatrix}+\sum_{i=n^2+1}^{m}a_i^0\begin{bmatrix}\mathbf{O}_n^n & \mathbf{J}_i\\ \mathbf{O}_1^n & 0\end{bmatrix}. \tag{12}$$

Подставим (12) в (7), заменив раздельную индексацию на общую (только для $a_{ij}^0$, $a_i^0$), и получим

$$\mathbf{D}(t)=\sum_{i=1}^{m}a_i^0(t)\,\mathbf{D}_i(t), \tag{13}$$

где

$$\mathbf{D}_i(t)=\left[\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{U})\right]^{-1}\left[\begin{bmatrix}\mathbf{J}_{ij}\mathbf{R} & \mathbf{J}_{ij}\mathbf{Q}\\ \mathbf{O}_1^n & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{O}_n^n & \mathbf{J}_i\\ \mathbf{O}_1^n & 0\end{bmatrix}\right]\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{U}). \tag{14}$$

В матрицах коэффициентов $\mathbf{D}_i(t)$ внутренняя индексация элементов сохраняется, т. е. обычные операции матричной алгебры не нарушаются.

Подстановка (13) в (9) и (11) приводит к следующим окончательным результатам:

$$\mathbf{M}_X(t)=\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{U})\,\mathbf{X}_0+\sum_{i,\,j=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau'}D_i\left(\tau'\right)D_j(\tau)\,k_{ij}^{(\mathbf{A})}\left(\tau,\tau'\right)d\tau\,d\tau'\,\mathbf{X}_0\,;$$

$$\mathbf{K}_X\left(t,\,t'\right)=\mathbf{\Omega}_{t_0}^t(\mathbf{U})\sum_{i,\,j=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t'}D_i\left(\tau'\right)\mathbf{X}^0\mathbf{X}^{0\mathrm{T}}D_j^{\mathrm{T}}(\tau)\,k_{ij}^{(\mathbf{A})}\left(\tau,\tau'\right)d\tau\,d\tau'\left(\mathbf{\Omega}_{t_0}^{t'}(\mathbf{U})\right)^{\mathrm{T}}.$$

Как правило, число случайных воздействий на реальную конструкцию невелико и матрица корреляционных функций $\mathbf{K}_A\left(t, t'\right)$ сильно разрежена. Структура полученных формул позволяет избавиться от нулевых членов суммы еще до вычислений и дает возможность оценить вклад каждого из воздействий в общий результат.

**Допущения и алгоритм.** В процессе вывода разрешающих зависимостей приняты два допущения. Первое необходимо при использовании статистической линеаризации и предполагает близость законов распределения фазовых координат к нормальному закону. На практике это необходимо только для тех элементов вектора, которые входят в нелинейную вектор-функцию. Известно [14], чем инерционнее система, тем ближе закон распределения ее фазовых координат к нормальному. Для механических систем это условие во многих случаях выполняется.

Второе допущение связано с разложением фундаментальной матрицы в ряд с учетом членов до квадратичных включительно. Следовательно, для обеспечения приемлемой точности уровень параметрических воздействий должен быть достаточно мал. Это традиционное допущение для параметрических задач. Отметим, что с качественной точки зрения второе допущение «вкладывается» в первое, поскольку высокий уровень параметрических воздействий может привести к существенному нарушению закона распределения фазовых координат вектора $\mathbf{X}$.

Рассмотрим вычислительные аспекты полученного результата. Вычисление прямой и обратной фундаментальных матриц удобно осуществить, если трактовать их как мультипликативные интегралы. Выберем во времени две точки: $t$ и $t+\Delta t$. Тогда на основании известного свойства фундаментальных матриц можно записать

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\Omega}_{t_0}^{t+\Delta t}(\mathbf{U})=\boldsymbol{\Omega}_{t}^{t+\Delta t}(\mathbf{U})\boldsymbol{\Omega}_{t_0}^{t}(\mathbf{U});\\
\left[\boldsymbol{\Omega}_{t_0}^{t+\Delta t}(\mathbf{U})\right]^{-1}=\left[\boldsymbol{\Omega}_{t_0}^{t}(\mathbf{U})\right]^{-1}\left[\boldsymbol{\Omega}_{t}^{t+\Delta t}(\mathbf{U})\right]^{-1};\\
\boldsymbol{\Omega}_{t_0}^{t_0}(\mathbf{U})=\left[\boldsymbol{\Omega}_{t_0}^{t_0}(\mathbf{U})\right]^{-1}=\mathbf{E}.
\end{gathered}\tag{15}$$

Представим фундаментальные матрицы в форме абсолютно и равномерно сходящихся интегростепенных рядов [15]:

$$\boldsymbol{\Omega}_{t_0}^{t}(\mathbf{U})=\mathbf{E}+\int_{t_0}^{t}\mathbf{U}\left(\tau_1\right)d\tau_1+\int_{t_0}^{t}\mathbf{U}\left(\tau_2\right)\int_{t_0}^{\tau_2}\mathbf{U}\left(\tau_1\right)d\tau_1\,d\tau_2+\ldots;$$

$$\left[\boldsymbol{\Omega}_{t_0}^{t}(\mathbf{U})\right]^{-1}=\mathbf{E}-\int_{t_0}^{t}\mathbf{U}\left(\tau_1\right)d\tau_1+\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau_2}\mathbf{U}\left(\tau_1\right)\mathbf{U}\left(\tau_2\right)d\tau_1\,d\tau_2-\ldots$$

Определим фундаментальные матрицы на малом отрезке $[t,\ t+\Delta t]$. При этом считаем, что $\mathbf{U}(\tau_1)=\mathbf{U}(\tau_2)=\mathbf{U}(t)=\text{const}.$ Тогда на основании выражения (14) имеем

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Omega}_t^{t+\Delta t}(\mathbf{U})=\mathbf{E}+\mathbf{U}(t)\,\Delta t+\frac{1}{2}\mathbf{U}^2(t)\Delta t^2+\ldots;\\&\left[\boldsymbol{\Omega}_t^{t+\Delta t}(\mathbf{U})\right]^{-1}=\mathbf{E}-\mathbf{U}(t)\Delta t+\frac{1}{2}\mathbf{U}^2(t)\Delta t^2-\ldots\end{aligned}\qquad(16)$$

Если в соотношениях (16) ограничиться линейными членами, то несложно показать, что вычисление по рекуррентным формулам в точности соответствует процедуре численного интегрирования методом Эйлера. При этом зависимость элементов матрицы $\mathbf{U}$ от $\mathbf{M}_X$ не приводит к дополнительным трудностям. Представление фундаментальных матриц в виде выражений (15) называется мультипликативным интегралом.

На основе этого алгоритма можно построить аналог процедур интегрирования любого порядка, например, использовать квадратичные члены в соотношениях (16) или по двум шагам выполнить вычисления методом Эйлера — Коши. Важным обстоятельством, которое необходимо учесть при организации рациональной вычислительной процедуры, является то, что матричная единица «почти нулевая». Таким образом, использование обычного правила умножения матриц при вычислении $\mathbf{D}_i(t)$ связано с многочисленными бесполезными умножениями на ноль. Для исправления этого недостатка необходимо модифицировать правило умножения матриц, если одна из них является матричной единицей. Несложно показать, что справедливы следующие простые правила умножения:

$$\mathbf{J}_{ik}\mathbf{R}=\mathbf{R}_i^{(k)},$$

где $\mathbf{R}_i^{(k)}$ — нулевая матрица, за исключением $i$-й строки, которая замещается $k$-й строкой. Для произвольных квадратных матриц $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ имеем

$$\mathbf{B}\mathbf{J}_{ij}\mathbf{C}=\mathbf{B}_i\,\mathbf{C}_j,$$

где $\mathbf{B}_i$ — столбец; $\mathbf{C}_j$ — строка.

**Пример.** В качестве примера рассматривается система с одной степенью свободы, движение которой определяется следующим уравнением:

$$\ddot{x}+2n\dot{x}+b\dot{x}^3+\omega_0^2\left[1+a_2^0(t)\right]x=\omega_0^2\left[1(t-0)+ga_1^0(t)\right].$$

Аддитивная и мультипликативная центрированные составляющие внешнего воздействия связаны уравнением

$$\dot{a}_2^0 + \lambda a_2^0 = g\lambda a_1^0(t), \tag{17}$$

где $a_1^0(t)$ — стационарный белый шум с математическим ожиданием $1(t-0)$ и интенсивностью $h$. Такая математическая формулировка задачи соответствует описанию динамики измерительного прибора, например маятникового акселерометра, с нелинейной диссипацией при наличии паразитных вибраций. При этом параметры $\lambda, g, b$ определяют условия его закрепления. Решение складывается из полезного сигнала (реакция на ступенчатое воздействие при $a_1^0(t) = a_2^0(t) \equiv 0$), вибрационной составляющей в математическом ожидании и вибраций в его окрестности. Уравнение (17) позволяет найти элементы матрицы корреляционных функций внешнего воздействия $\mathbf{A}(t) = \left(a_1(t),\ a_2(t)\right)^{\mathrm{T}}$. Для белого шума $k_{11}\left(t-t'\right) = h\delta\left(t-t'\right)$. На основании известного решения уравнения (17)

$$a_2^0(t) = g\lambda \exp(-\lambda t)\int_{t_0}^{t} \exp(-\lambda t)\, a_1^0(\tau)\, d\tau$$

имеем

$$k_{12}\left(t-t'\right) = hg\lambda \exp\left(-\lambda\left|t-t'\right|\right);$$
$$k_{22}\left(t,t'\right) = 0{,}5\, hg^2\lambda\left[\exp\left(-\lambda\left|t-t'\right|\right) - \exp\left(-\lambda\left(t+t'\right)\right)\right].$$

В расчетах приняты следующие значения параметров: $\omega_0 = 10$ с$^{-1}$; $n = 3$ с$^{-1}$; $g^2 = 2\cdot 10^{-4}$; $h = 8$; $b = 0{,}2$ м$^{-2}\cdot$с.

Коэффициенты статистической линеаризации для кубической нелинейности [14]

$$l = b\, m_{\dot{x}}\, D_{\dot{x}}\left[3 + \frac{m_{\dot{x}}^2}{D_{\dot{x}}}\right], \quad r = 3\, b\, D_{\dot{x}}\left[1 + \frac{m_{\dot{x}}^2}{D_{\dot{x}}}\right].$$

Решение проводилось предлагаемым методом и статистическим моделированием с числом реализаций $5\cdot 10^3$. На рис. 1 приведены математические ожидания: $m_0(t)$ — номинальное решение при $a_1^0(t) = a_2^0(t) \equiv 0$; $m_1(t)$ — результат воздействия мультипликативной составляющей $k_{22}\left(t,\, t'\right)$; $m_2(t)$ определяется взаимной корреляцией $k_{12}\left(t,\, t'\right)$. На рис. 2 приведено среднеквадратическое отклонение $\sigma_x(t)$. Вклад в математическое ожидание центрированной аддитивной составляющей $k_{11}\left(t,\, t'\right)$ равен нулю.

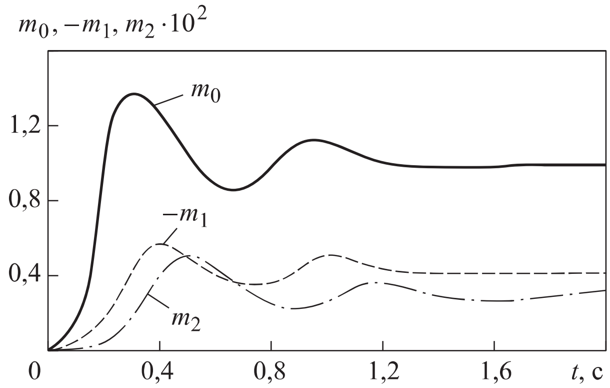


**Рис. 1.** Изменение номинальной и вибрационных составляющих реакции системы при ступенчатом внешнем воздействии

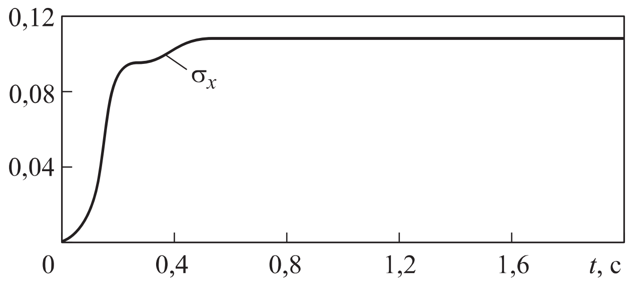


**Рис. 2.** Изменение среднеквадратического отклонения вибрационной составляющей реакции системы при ступенчатом внешнем воздействии

Расхождение результатов с методом Монте-Карло по $m_1$ не более 4 %, а по $\sigma_x$ – 5,5 %.

**Выводы.** 1. Решение не требует преобразований исходной системы уравнений к каноническому виду, что снимает условие стационарности внешних воздействий.

2. Предлагаемый подход позволяет достаточно просто оценить вклад каждой составляющей внешних воздействий в общий результат.

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Сафронов И. Angosat-1 ушел из зоны видимости. *Коммерсантъ*, 2018, № 6, с. 15.

[2] Бондаренко А.Ю., Лиходед А.И., Малинин А.А. и др. Исследование вибродинамики конструкций при кинематическом и силовом внешних воздействиях. *Космонавтика и ракетостроение*, 2017, № 3, с. 5–13.

[3] Липницкий Ю.М., Лиходед А.И., Сидоров В.В. Сравнительный анализ спектров нагружения элементов конструкций при их вибрационном возбуждении и пульсациях акустического давления. *Космонавтика и ракетостроение*, 2007, № 2, с. 84–93.

[4] Бондаренко А.Ю., Сидоров В.В. Методический подход к наземной отработке конструкций ракетно-космической техники при нагрузках, возникающих в результате переходных процессов. *Космонавтика и ракетостроение*, 2016, № 3, с. 77–82.

[5] Карп К.А., Евдокименко В.Н., Динеев В.Г. Инженерные методы вероятностного анализа авиационных и космических систем. М., Физматлит, 2010.

[6] Золкин С.Н., Титов В.А. Верификация динамических моделей изделий ракетно-космической техники на основе сопоставления их расчетных и экспериментальных амплитудно-частотных характеристик. *Космонавтика и ракетостроение,* 2013, № 2, с. 28–34.

[7] Светлицкий В.А. Статистическая механика и теория надежности. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.

[8] Гусев А.С. Вероятностные методы в механике машин и конструкций. М., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009.

[9] Gottwald G., Harlim J. The role of additive and multiplicative noise in filtering complex dynamics systems. *Proc. R. Soc. Lond. A: Math., Phys. Eng. Sc.*, 2013, vol. 469, no. 2155, pp. 96–112. DOI: 10.1098/rspa.2013.0096

[10] Зайцев С.Э., Тушев О.Н. Оценка влияния случайных аддитивных и мультипликативных вибраций на динамическое поведение системы. *Известия РАН. МТТ*, 2001, № 6, с. 163–167.

[11] Блехман И.И. Вибрационная механика. М., Физматлит, 1994.

[12] Тушев О.Н., Маркианов А.В. Анализ влияния высокочастотных случайных вибраций на нелинейную модель конструкции. *Известия вузов. Машиностроение*, 2016, № 10, с. 32–38. DOI: 10.18698/0536-1044-2016-10-32-38

[13] Казаков И.Е. Статистическая теория систем управления в пространстве состояний. М., Наука, 1975.

[14] Казаков И.Е. Статистические методы проектирования систем управления. М., Машиностроение, 1969.

[15] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М., Физматлит, 2010.

**Тушев Олег Николаевич** — д-р техн. наук, профессор кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Беляев Александр Владимирович** — канд. техн. наук, доцент кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Ван Ичжоу** — студент кафедры «Аэрокосмические системы» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

**Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:**

Тушев О.Н., Беляев А.В., Ван Ичжоу. Анализ динамики нелинейных моделей конструкций ракетно-космической техники при нестационарных случайных нагрузках. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2020, № 1, с. 42–55. DOI: https://doi.org/10.18698/0236-3941-2020-1-42-55

# NON-LINEAR MODEL DYNAMICS ANALYSIS FOR AEROSPACE ENGINEERING STRUCTURES SUBJECTED TO NON-STEADY-STATE RANDOM LOADS

**O.N. Tushev** tushev49@bk.ru
**A.V. Belyaev** beliaev@bmstu.ru
**Wang Yizhou**

**Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**

**Abstract**

In aerospace engineering, it is customary to employ stochastic analysis methods at the design stage to investigate how the mechanical system responds to random external forces. This is relevant due to high reliability requirements for spacecraft. We developed a method for probabilistic estimation of the dynamic properties of a structure subjected simultaneously to external (additive) and parametric (multiplicative) vibrations. An ordinary non-linear vector differential equation describes the vibrations in the elastic structure. Non-linear position and velocity properties of kinematic pairs may have cusps and discontinuities. We assume that the probabilistic dispersions of respective phase coordinates are close to the normal distribution of probability density. The initial non-linear vibration equations are statistically linearised. The system of differential equations is not rewritten in the canonical form, which means that it is possible to carry out the probabilistic analysis of the system for any external non-steady-state effect. The fundamental matrix of the linearised system is used to find the expected value vector and the correlation function matrix of the phase coordinate vector. The solution consists of a matrix integro-power series containing linear and quadratic terms. Using the method makes it possible to assess the contribution of each external force component to the total result. We consider an example of a non-linear system responding to a stepwise non-steady-state external influence

**Keywords**

*Forced oscillation equations, stochastic analysis, external (additive) and parametric (multiplicative) effects, statistical linearisation, integro-power series, fundamental matrix, multiplicative integral*

Received 15.04.2019
Accepted 13.06.2019


*The study was supported by the RFBR grant no. 20-08-01076a*

## REFERENCES

[1] Safronov I. Angosat-1 has left the visibility range. *Kommersant"*, 2018, no. 6, p. 15 (in Russ.).

[2] Bondarenko A.Yu., Likhoded A.I., Malinin A.A., et al. Dynamic analysis of space structures, excited by external acceleration or force. *Kosmonavtika i raketostroenie*, 2017, no. 3, pp. 5–13 (in Russ.).

[3] Lipnitskiy Yu.M., Likhoded A.I., Sidorov V.V. Comparative load spectra analysis for structural elements affected with vibration and acoustic pressure impulses. *Kosmonavtika i raketostroenie*, 2007, no. 2, pp. 84–93 (in Russ.).

[4] Bondarenko A.Yu., Sidorov V.V. Methodical approach to ground testing of products of rocket and space technology under loads resulting from transient processes. *Kosmonavtika i raketostroenie*, 2016, no. 3, pp. 77–82 (in Russ.).

[5] Karp K.A., Evdokimenko V.N., Dineev V.G. Inzhenernye metody veroyatnostnogo analiza aviatsionnykh i kosmicheskikh system [Engineering methods of spacecraft and aircraft probabilistic analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010.

[6] Zolkin S.N., Titov V.A. Verification of dynamic models of rocket and space technological products, based on a comparison of calculated and experimental amplitude-frequency characteristics. *Kosmonavtika i raketostroenie*, 2013, no. 2, pp. 28–34 (in Russ.).

[7] Svetlitskiy V.A. Statisticheskaya mekhanika i teoriya nadezhnosti [Statistic mechanics and reliability theory]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2004.

[8] Gusev A.S. Veroyatnostnye metody v mekhanike mashin i konstruktsiy [Probabilistic methods in machine and construction mechanics]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2009.

[9] Gottwald G., Harlim J. The role of additive and multiplicative noise in filtering complex dynamics systems. *Proc. R. Soc. Lond. A: Math., Phys. Eng. Sc.*, 2013, vol. 469, no. 2155, pp. 96–112. DOI: 10.1098/rspa.2013.0096

[10] Zaytsev S.E., Tushev O.N. Impact assessment of random additive and multiplicative vibration on system dynamic behaviour. *Izvestiya RAN. MTT,* 2001, no. 6, pp. 163–167 (in Russ.).

[11] Blekhman I.I. Vibratsionnaya mekhanika [Vibrational mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1994.

[12] Tushev O.N., Markianov A.V. The analysis of influence of high-frequency vibrations on the nonlinear model of a construction. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Machine Building], 2016, no. 10, pp. 32–38 (in Russ.). DOI: 10.18698/0536-1044-2016-10-32-38

[13] Kazakov I.E. Statisticheskaya teoriya sistem upravleniya v prostranstve sostoyaniy [Statistic theory of control system in state space]. Moscow, Nauka Publ., 1975.

[14] Kazakov I.E. Statisticheskie metody proektirovaniya sistem upravleniya [Statistic methods of control system engineering]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1969.

[15] Gantmakher F.R. Teoriya matrits [Matrix theory]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010.

**Tushev O.N.** — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Aerospace Systems, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Belyaev A.V.** — Cand. Sc. (Eng.), Assoc. Professor, Department of Aerospace Systems, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Wang Yizhou** — student, Department of Aerospace Systems, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

**Please cite this article in English as:**

Tushev O.N., Belyaev A.V., Wang Yizhou. Non-linear model dynamics analysis for aerospace engineering structures subjected to non-steady-state random loads. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 2020, no. 1, pp. 42–55 (in Russ.). DOI: https://doi.org/10.18698/0236-3941-2020-1-42-55