

УДК 621.833.7

Г. А. Тимофеев, М. В. Самойлова

## **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ГРАФОВ В СТРУКТУРНОМ АНАЛИЗЕ ПЛАНЕТАРНО- ВОЛНОВОГО МЕХАНИЗМА**

*Рассмотрены возможности использования метода графов для структурного анализа сложных зубчатых механизмов, имеющих гибкие звенья. Показана наглядность метода и его простота.*

**E-mail:** [timga@bmstu.ru](mailto:timga@bmstu.ru)

**Ключевые слова:** *зубчатые механизмы, планетарные передачи, структурный анализ, граф.*

При проектировании механизмов машин, когда предъявляются повышенные требования к их долговечности, безотказной работе и простоте сборки, особое внимание следует уделять правильному выбору структурной схемы механизма. Необходимо стремиться к созданию механизмов, не имеющих избыточных связей (рациональных механизмов) [1]. Применение рациональных механизмов позволяет получить ряд существенных преимуществ [2]:

- расширяются допуски на изготовление звеньев механизма, уменьшаются зазоры в кинематических парах и зацеплениях, чему способствует самоустановка звеньев;
- уменьшается чувствительность к изменению размеров, что важно для конструкций, работающих в широком диапазоне температур;
- уменьшается трение и увеличивается КПД из-за существенного уменьшения натягов в независимых контурах.

Однако при создании передаточных механизмов, к которым предъявляются высокие требования по статическому моменту трогания, крутильной жесткости и собственной частоте колебаний, рациональные конструкции механизмов, как правило, не применяются [3, 4].

К таким механизмам относятся кривошипно-планетарные механизмы (КПМ), волновые зубчатые передачи (ВЗП) с генераторами волн внутреннего и внешнего деформирования [5].

По сравнению с зубчатыми механизмами других видов с позиций требований, которые предъявляются к редукторам приводов САУ, КПМ и ВЗП имеют существенные преимущества. Эти механизмы обычно реализуют многозонное и многопарное зубчатые зацепления, которые обеспечивают им высокие кинематическую точность и крутильную жесткость при небольших габаритных размерах и массе. Кроме того, эти механизмы имеют малый приведенный к входному валу момент инерции [3].

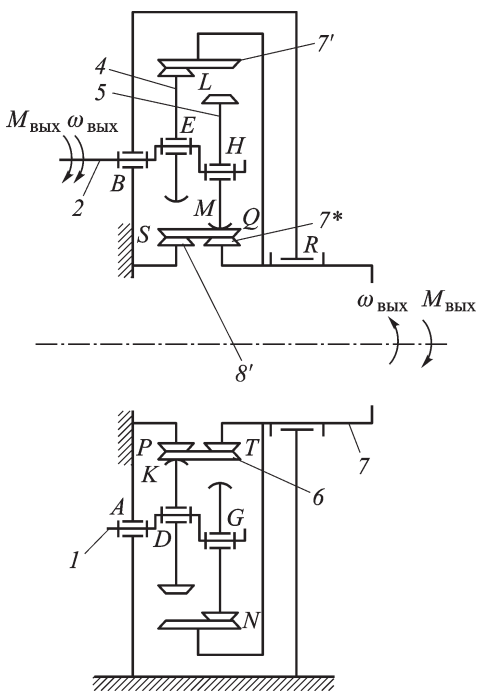


Рис. 1. Схема КПВМ

первый обеспечивает отсутствие люфта в передаче в силу податливости гибкого колеса. При малых нагрузках, когда люфт в КПМ еще не выбран, работает только волновая передача. С увеличением нагрузки в работу включается планетарная передача. Поскольку планетарная передача имеет бóльшие модуль и диаметр зубчатых колес, то и ее крутильная жесткость больше крутильной жесткости волновой передачи. Поэтому при большой нагрузке основная ее часть воспринимается планетарным механизмом, а меньшая — волновым.

В настоящей работе проведен структурный анализ КПВМ методом графов, определены число избыточных связей, их характер, местонахождение и возможности их устранения

Метод структурного анализа механизмов, разработанный на базе общей теории графов [7, 8], основан на анализе независимых контуров механизма, их взаимодействия и использует аппарат теории графов. Структура механизма исследуется на его математической модели — графе. В графе механизма звенья образуют множество вершин, а кинематические пары — множество ребер. Очевидно, что граф механизма содержит число вершин, равное числу звеньев ( $n$ ), и число ребер, равное числу кинематических пар ( $p$ ). Класс и вид кинематических пар характеризуются матрицей подвижностей, состоящей из трех элементов —  $(f'' f' f''')$  [7, 8], проставляемой в графе на соответствующих ребрах. Первый элемент матрицы-строки обозначает число допуска-

Оригинальным конструктивным решением, в котором удачно сочетаются достоинства ВЗП и КПМ, является комбинированный планетарно-волновой механизм (КПВМ) [6].

Конструкция этого механизма (рис. 1) обеспечивает параллельное соединение КПМ и ВЗП внешнего деформирования [5]. Входной энергетический поток при передаче и преобразовании энергии в таком механизме разбивается на несколько потоков (при двух сателлитах — на четыре), а затем вновь суммируется на выходном звене, что позволяет существенно повысить крутильную жесткость и кинематическую точность механизма. При параллельной работе волнового и планетарного механизмов

емых парой независимых вращательных движений, второй — поступательных, третий — винтовых. Тогда одноподвижная вращательная пара класса  $V_2$  запишется в виде матрицы подвижности (100), одноподвижная поступательная  $V_3$  — (010), одноподвижная винтовая  $V_4$  — (001), двухподвижная цилиндрическая  $IV_2$  — (110), трехподвижная сферическая  $III_2$  — (300) и т.д.

Если два звена механизма соединяются друг с другом более чем одной кинематической парой, то в графе механизма соответствующие вершины соединяются числом ребер, кратным числу кинематических пар. В гибких звеньях одна часть звена относительно другой имеет некоторую подвижность. На графе механизма это отражается наличием петли, соединяющей вершину саму с собой. Петля — это не кинематическая пара, это как бы условная кинематическая пара, характеризующая подвижности самого гибкого звена. При этом число петель равно числу кинематических пар, в которые входит гибкое колесо. Граф, допускающий наличие кратных ребер и петель, называется псевдографом. Граф КПВМ — это псевдограф.

Для расчета избыточных связей и подвижностей необходимо правильно определить, к какому классу кинематических пар относятся соединения звеньев в механизме. Проанализируем с этих позиций исследуемую схему КПВМ [1, 7, 8] (рис. 2).

1. Кривошипные (ведущие) валики ставятся в корпус на радиальные шарикоподшипники. Следовательно, эти соединения — пары класса  $V_2$ , т.е. (100).

2. Деформирующие кольцевые шайбы устанавливаются на радиальные шарикоподшипники, поэтому их соединение по каждому кривошипу считается парой класса  $V_2$ , т.е. (100).

3. Деформирующие шайбы облегают гибкое колесо в двух зонах на дуге  $60^\circ$ – $120^\circ$ . Ширина полосы контакта незначительна по сравнению с длиной дуги облегания, поэтому рассматриваемые соединения принимаются кольцевыми, т.е. парами класса  $II_4$ , т.е. (220).

4. Гибкое колесо волновой передачи является податливым деформируемым звеном. Сама деформация — необходимое условие кинематики волнового зацепления. Она возникает под действием сил, неизмеримо меньших тех, которые могут вызвать такую же деформацию других звеньев волновой передачи. В самом гибком колесе точки контакта с деформирующими кольцами получают пространственные перемещения. К гибкому колесу применима аксиома отвердевания. Колесо представляется как жесткое, имеющее внутренние подвижности — шесть петель, т.е. шесть кинематических пар ( $K, M, P, Q, R, S, T$ ), в которые входит гибкое звено. Каждая петля характеризуется двумя линейными подвижностями — изменениями размеров по малой и большой осям деформации. При этом изменения линейных координат  $x, y$

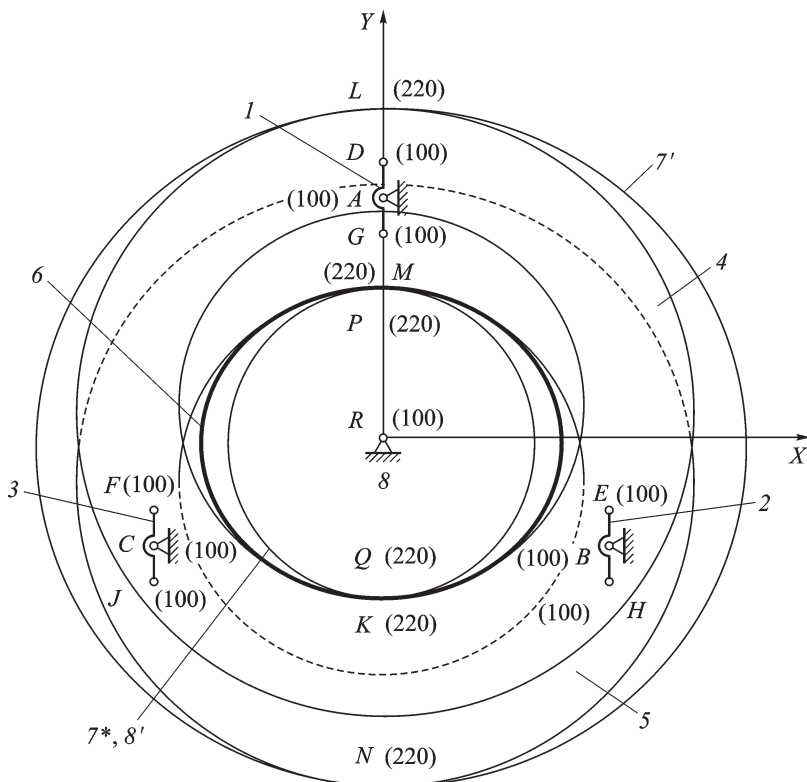
в системе координат  $XRY$  (см. рис. 2) взаимосвязаны и обусловлены формой кривой деформации, поэтому подвижность каждой петли — (100).

5. В зацеплениях гибкого колеса 6 (с внутренними зубьями) с жесткими колесами 8' и 7\* (с внешними зубьями) в малонагруженной передаче имеет место линейный контакт. Такие зацепления являются парами класса  $\Pi_4$ , т.е. (220).

6. Зацепления жестких колес 4, 5 (с внешними зубьями) и колеса 7' (с внутренними зубьями) рассматриваются так же, как кинематические пары класса  $\Pi_4$ , (220).

7. Выходной вал 7 устанавливается в корпус и крышку редуктора на радиальные шарикоподшипники. Отверстия под подшипники в крышке и корпусе растачиваются с одного установка деталей, поэтому можно принять (что обычно и делается в практике расчетов) два подшипника на валу за одну одноподвижную пару класса  $V_2$ , (100).

На структурной схеме передачи (см. рис. 1 и 2) обозначены кинематические пары, составляющие их звенья, классы кинематических пар и соответствующие им матрицы подвижностей, которые приведены в табл. 1.



**Рис. 2.** Схема КПВМ с обозначением матриц подвижностей кинематических пар

Кинематические пары КПВМ и их матрицы подвижностей

Кинематическая пара	Звенья, составляющие кинематическую пару	Матрица подвижностей	Класс кинематической пары
<i>A</i>	1–8	(100)	V <sub>2</sub>
<i>B</i>	2–8	(100)	V <sub>2</sub>
<i>C</i>	3–8	(100)	V <sub>2</sub>
<i>D</i>	1–4	(100)	V <sub>2</sub>
<i>E</i>	2–4	(100)	V <sub>2</sub>
<i>F</i>	3–4	(100)	V <sub>2</sub>
<i>G</i>	1–5	(100)	V <sub>2</sub>
<i>H</i>	2–5	(100)	V <sub>2</sub>
<i>J</i>	3–5	(100)	V <sub>2</sub>
<i>K</i>	4–6	(220)	П <sub>4</sub>
<i>L</i>	4–7	(220)	П <sub>4</sub>
<i>M</i>	5–6	(220)	П <sub>3</sub>
<i>N</i>	5–7	(220)	П <sub>3</sub>
<i>P</i>	6–7	(220)	П <sub>3</sub>
<i>Q</i>	6–7	(220)	П <sub>3</sub>
<i>R</i>	7–8	(100)	V <sub>2</sub>
<i>S</i>	7–8	(220)	П <sub>3</sub>
<i>T</i>	6–8	(220)	П <sub>3</sub>

Сам структурный анализ состоит из следующих этапов.

1. По структурной схеме механизма составляется его  $(n, p)$ -граф (рис. 3), где каждое звено — это вершина, а кинематические пары — соответствующие ей ребра. Ребра идентифицируются матрицами подвижностей кинематических пар.

2. Число независимых контуров рассчитывается по формуле

$$K = p - n + 1. \quad (1)$$

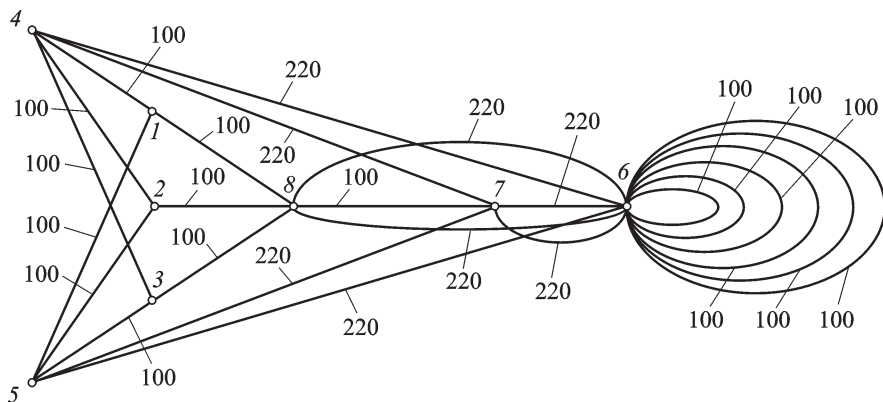


Рис. 3. Граф КПВМ

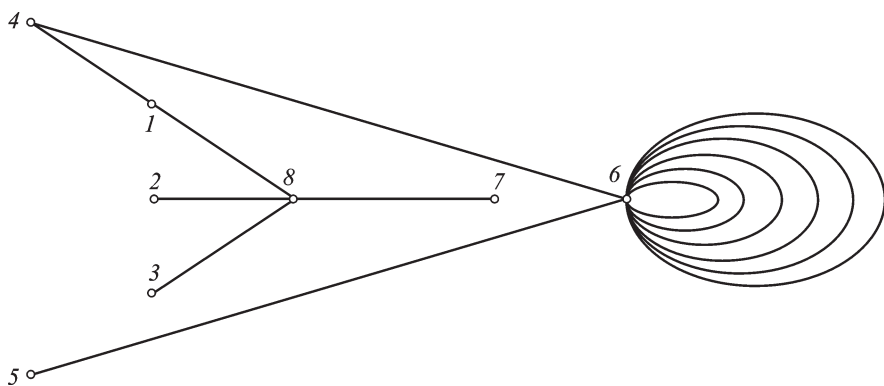


Рис. 4. Дерево КПВМ

Независимым контуром называется такая замкнутая последовательность звеньев и кинематических пар, в которой все звенья и кинематические пары различны и  $n \geq 3$  и которая отличается от любой другой последовательности хотя бы одной кинематической парой,  $\in K$ .

3. Для получения набора независимых контуров из графа удаляется  $K$  ребер так, чтобы не осталось ни одного замкнутого контура. Оставшаяся часть графа — это дерево (рис. 4).

4. К дереву добавляется одно ребро и таким образом создается первый независимый контур. Ребро выбирается так, чтобы в первый контур входили ведущее звено и стойка.

5. Подсчитываются контурные подвижности ( $f_k$ ) и связи ( $q_k$ ). Расчет подвижностей в контуре проводится по следующим правилам [7]:

а) для замыкания контура без натяга требуется шесть подвижностей (330);

б) угловые ( $f''$ ) и винтовые ( $f'''$ ) подвижности кинематических пар могут заменять отсутствующие линейные подвижности ( $f'$ ) в контуре, обратная замена невозможна;

в) угловые подвижности одного звена могут заменить не более двух линейных подвижностей.

Подвижности каждого контура определяются по формуле

$$(W)_k = \sum_{i=1} (f)_i + (-1) (330) + (-1) (W)_0, \quad (2)$$

где  $(W)_k$  — матрица подвижностей анализируемого контура;  $\sum_{i=1} (f)_i$  — сумма матриц подвижностей кинематических пар, являющихся характеристиками данного контура; (330) — матрица подвижностей, обеспечивающая замыкание контура без натяга;  $(W)_0$  — матрица подвижностей входного звена, т.е. основной подвижности.

Знак “-” в матрице  $(W)_k$  означает избыточную связь (недостаток подвижностей), знак “+” — избыточную подвижность.

6. Все сказанное в п. 5 повторяется для другого ребра. Оно тоже образует с ветвями данного дерева независимый контур. В расчет данного контура входят только новые ребра, которые не принимали участия в предыдущем расчете.

7. Далее аналогичным образом добавляемым ребром и ветвями дерева каждый раз создается новый контур. Каждый последующий контур должен присоединяться к предыдущим теми ребрами, которые участвуют в расчете данного контура. В остальном порядок расчета контуров безразличен. Каждое ребро графа участвует в расчете только один раз. Если в графе имеется петля, ее подвижности относятся к расчету только того контура, который содержит звено с петлей и звено, вызывающее деформацию.

8. Для контуров, имеющих избыточные подвижности ( $W_k > 0$ ), определяются звенья и группы звеньев, подвижность которых рассчитывается по формуле:

$$(f)_r = \sum_{i=1}^{r+1} (f)_i + (-1)(330) + (-1) \sum_{j=1}^{r-1} (f)_{j \in r}, \quad (3)$$

где  $(f)_r$  — подвижность упорядоченной  $r$ -й выборки звеньев (одно-го звена или группы звеньев в том порядке, в котором они идут по цепи контура);  $\sum_{i=1}^{r+1} (f)_i$  — сумма подвижностей всех кинематических пар данной  $r$ -й выборки, включая крайние кинематические пары;  $\sum_{j=1}^{r-1} (f)_{j \in r}$  — сумма подвижностей всех выборок звеньев порядков от 1 до  $(r - 1)$ , принадлежащих  $r$ .

Результат анализируется по п. 5, б, в.

9. Для механизмов, в независимых контурах которых имеются избыточные подвижности, строится контурная сеть, где каждый контур изображается в виде прямоугольника, в котором проставляются: его номер и номера его звеньев, число и вид избыточных связей, звенья и группы звеньев, имеющиеся подвижности и их характер (рис. 5).

Контурные соединяются между собой линиями, отражающими взаимосвязь независимых контуров. Эта взаимосвязь выражается в том, что подвижности кинематических пар дерева могут быть использованы в равной степени в любых независимых контурах, в которые они входят. Поэтому лишние подвижности одного контура могут быть использованы в последующих контурах при определенных условиях.

Если элементы одного контура являются одновременно элементами другого (по дереву), то между контурами проводится линия. Иными словами, в каждом последующем контуре определяют, к каким верши-

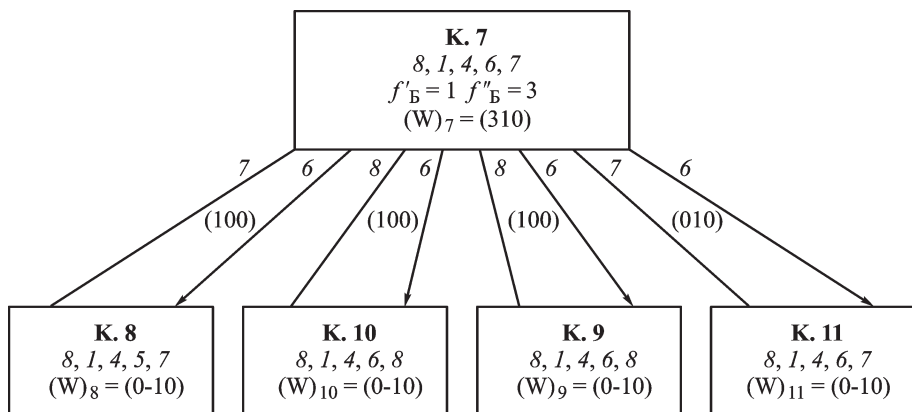


Рис. 5. Контурная сеть КПВМ

нам предыдущего присоединяются ребра, являющиеся характеристиками данного контура, проводят соответствующие линии и отмечают их этими вершинами (табл. 2).

Затем проводят анализ контурной сети следующим образом:

— если в контуре имеется подвижность у звена (группы звеньев), номер которого стоит на линии, соединяющей этот контур с последующим, то эта лишняя подвижность может быть реализована по правилам п. 5, б, в, если в последующем контуре имеется соответствующая избыточная связь;

— если подвижность имеется у другого звена, то она не может быть реализована;

— подвижность может быть реализована через контур (контур), не имеющий избыточных связей, при последовательном соединении.

Согласно приведенным этапам проводится структурный анализ КПВМ.

1. По структурной схеме механизма строим его граф (см. рис. 3).
2. Определяем число независимых контуров по формуле (1):

$$K = p - n + 1 = 18 - 8 + 1 = 11.$$

3. Из графа удаляем 11 ребер так, чтобы не осталось ни одного замкнутого контура. Получаем дерево (см. рис. 4).

4. К дереву прибавляем ребро 4–7. Получаем первый независимый контур — 8, 1, 4, 7 с кинематическими парами  $A, D, L, R$ .

5. Проводим анализ подвижностей первого контура, определяем звенья и группы звеньев, имеющих подвижности.

6. Далее аналогичным образом рассчитываем все остальные контуры. Данные расчета заносим в табл. 2, в которой штриховой линией обозначены ребра, принадлежащие  $K$  (удаленные ребра); зачеркнуты (значком “//”) ребра, участвующие в расчетах предыдущих контуров, так же зачеркнуты кинематические пары контура. Оставшиеся пары являются характеристиками данного контура.



## Расчет подвижностей и избыточных связей в контурах КПВМ

№ контура	Контур	Кинематические пары контура	Расчет подвижностей и связей в контурах	
1		$A, D, L, R$	$(W)_1 = (100) + (100) + (220) +$ $+ (100) + (-1)(330) +$ $+ (-1)(100) = (1-10)$	$q=0$
2		$E, \cancel{D}, A, B$	$(W)_2 = (100) + (100) +$ $+ (-1)(330) + (-1)(100) = (-2-30)$ <hr/> Если привод от одного валика, то последнее слагаемое $+(-1)(100)=0$	$q=5$ <hr/> $q=4$
3		$A, \cancel{D}, F, C$	$(W)_3 = (100) + (100) +$ $+ (-1)(330) + (-1)(100) = (-2-30)$ <hr/> Если привод от одного валика, то последнее слагаемое $+(-1)(100)=0$	$q=5$ <hr/> $q=4$
4		$A, G, N, \cancel{R}$	$(W)_4 = (100) + (220) +$ $+ (-1)(330) = (1-10)$	$q=1$
5		$B, H, \cancel{N}, \cancel{R}$	$(W)_5 = (100) + (-1)(330) = (-2-30)$	$q=5$
6		$\cancel{C}, \cancel{N}, \cancel{R}, J$	$(W)_6 = (100) + (-1)(330) = (-2-30)$	$q=5$

№ контура	Контур	Кинематические пары контура	Расчет подвижностей и связей в контурах	
7		$A, \cancel{D}, K, Q, R$	$(W)_7 = (220) + (220) + (100) + (100) + (-1)(330) = (310)$ $W_M = 1$	
8		$A, \cancel{D}, K, M, N, R$	$(W)_8 = (220) + (100) + (-1)(330) = (0-10)$ $q = 1$	
9		$A, \cancel{D}, K, P$	$(W)_9 = (220) + (100) + (-1)(330) = (0-10)$ $q = 1$	
10		$A, \cancel{D}, K, S$	$(W)_{10} = (220) + (100) + (-1)(330) = (0-10)$ $q = 1$	
11		$A, \cancel{D}, K, T, R$	$(W)_{11} = (220) + (100) + (-1)(330) = (0-10)$ $q = 1$	

7. Проверяем, все ли кинематические пары ( $p$ ) участвовали в расчетах один раз.

В результате поконтурного анализа выявлены места присутствия избыточных связей и местных подвижностей и их вид. При наличии местных подвижностей выполнить замещение недостающих линейных и угловых подвижностей можно только в последующих контурах, если требуемая подвижность есть у звена, которое входит в эти последующие контуры.

В первом контуре нет ни избыточных связей, ни местных подвижностей. Во втором и третьем контурах (если ведущим будет только один кривошипный вал) — по четыре избыточных связи. Для исключения их технологически необходимо строго выдерживать параллельность осей кинематических пар  $B$  и  $E$ ,  $C$  и  $F$  осей кинематических пар  $A$  и  $D$ . Если ведущими сделать все кривошипные валики, то необходимо дополнительно строго выдерживать их параллельность и синхронность вращения. В контуре 4 есть одна избыточная связь, требующая параллельности осей кинематических пар  $A$  и  $G$ . В контурах 5 и 6 имеем по пять избыточных связей, для исключения их влияния требуется обеспечить параллельность осей кинематических пар  $H$  и  $J$  осей  $B, N, R$  и  $C, N, R$ , а также соответствие координат  $H$  и  $J$  координатам оси  $Q$ . В контуре 7 — имеем четыре местные подвижности (три угловые и одну линейную). Они принадлежат гибкому колесу-кольцу 6. В контурах 8–11 имеется по одной избыточной линейной связи.

Строим контурную сеть механизма (см. рис. 5), начиная с седьмого контура, так как в нем выявились местные подвижности. Все подвижности принадлежат звену 6, поскольку в данном контуре присоединили только звено 6 и нет нужды использовать формулу (3). Согласно данным табл. 2 соединяем контуры линиями и отмечаем их вершинами, к которым присоединяются ребра — характеристики данного контура. Из контура 7 (см. рис. 5) через звено 6 передаются подвижности (310) согласно п. 5,  $\bar{b}$ ,  $\bar{e}$  в контуры 8–11. В случае одного ведущего валика КПВМ имеем  $W_0 = 1$ ,  $q = 19$ ; при трех ведущих кривошипных валах —  $W_0 = 3$ ,  $q = 21$ .

Как известно, число избыточных связей в структурной схеме механизма может косвенно служить показателем качества, надежности, долговечности и себестоимости конструкции [1]. Значительное число избыточных связей в передаче требует изменения допусков на размеры изготавливаемых деталей, селективной сборки и других технологических приемов.

На этом основании рассмотренный КПВМ с кинематическими парами класса  $V_2$  в соединении кольцевых деформирующих шайб с кривошипными валиками был признан нетехнологичным, как содержащий значительное число избыточных связей. Для уменьшения числа избыточных связей без ухудшения основных качественных показателей была разработана конструкция с кинематическими парами класса  $III_2'$  в местах соединений кривошипных валиков с деформирующими шайбами. В результате только этого мероприятия число избыточных связей в новой конструкции уменьшено на 10, что позволило снизить требования к точности изготовления деталей механизма параллельных кривошипов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Р е ш е т о в Л. Н. Конструирование рациональных механизмов. – М.: Машиностроение, 1972. – 256 с.
2. Р е ш е т о в Л. Н. Самоустанавливающиеся механизмы: Справочник. – М.: Машиностроение, 1991. – 288 с.
3. К р а й н е в А. Ф. Идеология конструирования. Многопоточность передачи энергии: Справочник // Инженерный журнал. – 1997. – № 7. – С. 28–31.
4. Т и м о ф е е в Г. А. Разработка методов расчета и проектирование волновых зубчатых передач для приводов следящих систем. Дис. . . д-ра техн. наук. – М.: ИМАШ РАН, 1997. – 358 с.
5. А.с. № 541057 СССР, МКИ F16H 1/00 Волновая передача / В.Б. Тарабарин, Г.А. Тимофеев // Б.И. – 1976. – № 48.
6. А.с. № 1569467 А1 СССР, МКИ F16H 1/00 Устройство для преобразования вращательного движения / Ю.В. Костиков, С.А. Михайловский, И.В. Никитин, В.Б. Тарабарин, Ф.И. Фурсяк // Б.И. – 1990. – № 21.
7. П а в л о в а Л. А. Метод графов в структурном исследовании пространственных механизмов. Дис. . . канд. техн. наук. – М.: МВТУ им. Н.Э.Баумана, 1976. – 180 с.
8. П а в л о в а Л. А., Т и м о ф е е в Г. А. Структурный анализ волновых редукторов с генераторами волн внешнего деформирования // Тр. Казах. филиала Всесоюз. сем. по ТММ. – Алма-Ата, 1977. – вып. 2. – С. 46–57.

Статья поступила в редакцию 5.03.2010



Геннадий Алексеевич Тимофеев родился в 1944 г., окончил МВТУ им. Н.Э.Баумана в 1969 г. Д-р техн. наук, заведующий кафедрой “Теория механизмов и машин” МГТУ им. Н.Э. Баумана, заслуженный работник ВШ РФ, лауреат премии правительства РФ в области образования за 2008 г. Автор более 170 научных и методических работ в области автоматизированного проектирования механизмов машин.

G.A.Timofeev (b.1944) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1969. D. Sc. (Eng.), head of “Theory of Mechanisms and Machines” department of the Bauman Moscow State Technical University, laureate of Government of the Russian Federation prize in the field of education for 2008. Honoured Higher School Worker of the Russian Federation. Author of more

than 170 scientific and pedagogic-methodical publications in the field of automatic designing of machine mechanisms.



Марина Валерьевна Самойлова родилась в 1962 г., окончила МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1986 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Теория механизмов и машин” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 40 научных работ в области проектирования волновых и планетарных механизмов.

M.V. Samoilovala (b. 1962) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1986. Ph. D. (Eng.), assoc. professor of “Theory of Mechanisms and Machines” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 40 publications in the field of design of the wave and planetary mechanisms.