УДК 624.07.534.1

В. А. Светлицкий, В. В. Романов

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ С ЛОКАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ, НАГРУЖЕННЫХ СЛЕДЯЩИМИ СИЛАМИ

Изложен алгоритм точного численного определения комплексных собственных значений при колебаниях прямолинейных стрежней с локальными связями и нагруженных следящими силами. Приведены результаты точного численного определения комплексных собственных значений, зависящих от положения упругой локальной связи, определены (для рассмотренных конкретных примеров) критические значения следящих сил и их зависимость от положения локальной связи. Показано, что при следящих силах потеря устойчивости может быть как динамической (флаттер), так и статической (дивергенция).

E-mail: romanov_rk5@mail.ru

Ключевые слова: стержни, статическая и динамическая устойчивость, критические следящие силы, критическая скорость.

Точный численный метод определения комплексных собственных значений. На рис. 1, a показан прямолинейный стержень, имеющий упругую локальную связь. Стержень нагружен следящей силой P. На рис. 1, δ показан участок трубопровода, заполненного идеальной жидкостью, движущейся с постоянной скоростью.

Реакция вытекающей струи жидкости вызывает сжимающую следящую силу [1–3].

Устойчивость прямолинейного стержня, имеющего локальную упругую опору и нагруженного следящей силой P. Уравнения малых колебаний стержня в плоскости X_1OX_2 (в связанных осях). Воспользуемся уравнениями в безразмерной форме, приведенными в работе [4 гл. 6, уравнения (6.16)–(6.19)]. В рассматриваемом примере стержень имеет постоянное сечение; силы вязкого сопротивления и инерция вращения элемента стержня не учитываются, поэтому $n_1 = 1$, $A_{33} = 1$, $k_1 = 0$.

При колебаниях на стержень действует сила реакции связи R($\Delta q_2 = R\delta (\eta - \eta_1) = -cu_2\delta (\eta - \eta_1)$); распределенные моменты равны нулю, $\mu = 0$).

В этом частном случае получаем систему следующих уравнений





малых колебаний стержня в плоскости X_1OX_2 :

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \eta} - Q_{10} \Delta M_3 = \Delta q_2;$$

$$\frac{\partial \Delta M_3}{\partial \eta} + \Delta Q_2 = 0;$$

$$\frac{\partial \vartheta_3}{\partial \eta} - \Delta M_3 = 0;$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \eta} - \vartheta_3 = 0,$$
(1)

где $\Delta M_3 = A_{33} \Delta k_3 = \Delta k_3; Q_{10} = -P; \Delta q_2 = R\delta(\eta - \eta_1) = -cu_2\delta(\eta - \eta_1).$

Систему уравнений (1) можно записать в виде векторного уравнения

$$A^{(1)}\frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \eta} + A^{(2)} \mathbf{Z} = \mathbf{b}\delta(\eta - \eta_1), \qquad (2)$$

где $oldsymbol{Z} = (\Delta Q_2, \Delta M_3, artheta_3, u_2)^{ \mathrm{\scriptscriptstyle T}} -$ вектор состояния;

$A^{(1)} =$	0 0 0	0 0 0	0 0 0	$-1^{-1}_{0}_{0}$;	$A^{(2)} =$	0 1 0	-P 0 -1	0 0 0	0 0 0	
	0	0	0	0			0	0^{-1}	-1	0)

 $\boldsymbol{b} = (cu_2, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}.$

Определение комплексных собственных значений. Решение уравнения (2) находим в виде

$$\boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{Z}_0^{(1)} + i\boldsymbol{Z}_0^{(2)})e^{(\alpha+i\beta)\tau}; \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_0 e^{(\alpha+i\beta)\tau}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{Z}_{0}^{(j)} = \left(\Delta Q_{20}^{(j)}, \Delta M_{30}^{(j)}, \vartheta_{30}^{(j)}, u_{20}^{(j)}\right)^{\mathrm{T}}$ при j = 1, 2.

Подставив формулы (3) в уравнение (1), после преобразований получим два уравнения:

$$\frac{d\boldsymbol{Z}_{0}^{(1)}}{d\eta} + A^{(2)}\boldsymbol{Z}_{0}^{(1)} + (\alpha^{2} - \beta^{2})A^{(1)}\boldsymbol{Z}_{0}^{(1)} - 2\alpha\beta A^{(1)}\boldsymbol{Z}_{0}^{(2)} = \boldsymbol{b}_{0}^{(1)}\delta(\eta - \eta_{1});$$

$$\frac{d\boldsymbol{Z}_{0}^{(2)}}{d\eta} + A^{(2)}\boldsymbol{Z}_{0}^{(2)} + 2\alpha\beta A^{(1)}\boldsymbol{Z}_{0}^{(1)} + (\alpha^{2} - \beta^{2})A^{(1)}\boldsymbol{Z}_{0}^{(2)} = \boldsymbol{b}_{0}^{(2)}\delta(\eta - \eta_{1}),$$
(4)

где $\boldsymbol{b}_0^{(1)} = (cu_{20}^{(1)}, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}; \, \boldsymbol{b}_0^{(2)} = (cu_{20}^{(2)}, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}.$ Представим систему (4) в виде

$$\frac{d\boldsymbol{Z}_{0}}{d\eta} + A\boldsymbol{Z}_{0} = \boldsymbol{B}_{0}\delta\left(\eta - \eta_{1}\right), \qquad (5)$$

где
$$\mathbf{Z}_0 = \left(\mathbf{Z}_0^{(1)}, \mathbf{Z}_0^{(2)}\right)$$
; $\mathbf{B}_0 = \left(\mathbf{b}_0^{(1)}, \mathbf{b}_0^{(2)}\right)$;
$$A = \begin{bmatrix} A^{(2)} + (\alpha^2 - \beta^2) A^{(1)} & -2\alpha\beta A^{(1)} \\ \\ 2\alpha\beta A^{(1)} & A^{(2)} + (\alpha^2 - \beta^2) A^{(1)} \end{bmatrix}.$$

Решение уравнения (5) запишем как

$$\boldsymbol{Z}_{0} = K\left(\alpha, \beta, \eta\right) \boldsymbol{C} + \int_{0}^{\eta} G\left(\alpha, \beta, \eta, \eta_{1}\right) \boldsymbol{B}_{0} \delta\left(\eta^{(1)} - \eta_{1}\right) d\eta^{(1)}, \quad K\left(\alpha, \beta, 0\right) = E \quad (6)$$

или с учетом свойств *б*-функции — следующим образом:

$$\boldsymbol{Z}_{0} = K(\alpha, \beta, \eta) \boldsymbol{C} + G(\alpha, \beta, \eta, \eta_{1}) \boldsymbol{B}_{0} H(\eta - \eta_{1}), \qquad (7)$$

где $K(\alpha, \beta, \eta)$ — фундаментальная матрица решений однородного уравнения (5); $C = (C^{(1)}, C^{(2)})^{\mathsf{T}}$ — произвольный вектор, $C^{(j)} = (c_1^{(j)}, c_2^{(j)}, c_3^{(j)}, c_4^{(j)})^{\mathsf{T}}, j = 1, 2; G(\alpha, \beta, \eta, \eta_1)$ — матрица Грина, $G(\alpha, \beta, \eta, \eta_1) = E; H(\eta - \eta_1)$ — функция Хевисайда.

Из уравнения (7) получаем выражения для векторов $oldsymbol{Z}_0^{(1)}$ и $oldsymbol{Z}_0^{(2)}$:

$$\boldsymbol{Z}_{0}^{(1)}(\eta) = K_{11}\boldsymbol{C}^{(1)} + K_{12}\boldsymbol{C}^{(2)} + G_{11}\boldsymbol{b}_{0}^{(1)}H + G_{12}\boldsymbol{b}_{0}^{(2)}H;$$

$$\boldsymbol{Z}_{0}^{(2)}(\eta) = K_{21}\boldsymbol{C}^{(1)} + K_{22}\boldsymbol{C}^{(2)} + G_{21}\boldsymbol{b}_{0}^{(1)}H + G_{22}\boldsymbol{b}_{0}^{(2)}H,$$

(8)

где K_{ij}, G_{ij} – блочные матрицы.

Компоненты вектора $Z_0^{(\nu)}(\alpha,\beta,\eta)$ ($\nu = 1,2$), входящие в вектор Z_0 , должны удовлетворять краевым условиям задачи:

1)
$$\eta = 0$$
: $\vartheta_{30}^{(1)} = u_{20}^{(1)} = 0$, $\vartheta_{30}^{(2)} = u_{20}^{(2)} = 0$;
2) $\eta = 1$: $\Delta Q_{20}^{(1)} = \Delta M_{30}^{(1)} = 0$, $\Delta Q_{20}^{(2)} = \Delta M_{30}^{(2)} = 0$.
Из краевых условий получаем $c_3^{(1)} = c_4^{(1)} = 0$ и $c_3^{(2)} = c_4^{(2)} = 0$,
поэтому $\mathbf{c}^{(1)} = \left(c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, 0, 0\right)^{\mathsf{T}}$ и $\mathbf{c}^{(2)} = \left(c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, 0, 0\right)^{\mathsf{T}}$.

Из краевых условий при $\eta = 1$ системы (8) получаем четыре однородных уравнения:

$$k_{11}c_{1}^{(1)} + k_{12}c_{2}^{(1)} + k_{15}c_{1}^{(2)} + k_{16}c_{2}^{(2)} + g_{11}cu_{20}^{(1)} + g_{15}cu_{20}^{(2)} = 0;$$

$$k_{21}c_{1}^{(1)} + k_{22}c_{2}^{(1)} + k_{25}c_{1}^{(2)} + k_{26}c_{2}^{(2)} + g_{21}cu_{20}^{(1)} + g_{25}cu_{20}^{(2)} = 0;$$

$$k_{51}c_{1}^{(1)} + k_{52}c_{2}^{(1)} + k_{55}c_{1}^{(2)} + k_{56}c_{2}^{(2)} + g_{51}cu_{20}^{(1)} + g_{55}cu_{20}^{(2)} = 0;$$

$$k_{61}c_{1}^{(1)} + k_{62}c_{2}^{(1)} + k_{65}c_{1}^{(2)} + k_{66}c_{2}^{(2)} + g_{61}cu_{20}^{(1)} + g_{65}cu_{20}^{(2)} = 0.$$
(9)

В систему (9) входят неизвестные $u_{20}^{(1)}(\eta_1)$ и $u_{20}^{(2)}(\eta_1)$, которые можно получить из системы (8) (при $\eta = \eta_1$ матрица Грина единичная, поэтому $g_{ii} = 1, g_{ij} = 0$ при $i \neq j$):

$$k_{41}(\eta_1) c_1^{(1)} + k_{42}(\eta_1) c_2^{(1)} + k_{45}(\eta_1) c_1^{(2)} + k_{46}(\eta_1) c_2^{(2)} = u_{20}^{(1)}(\eta_1);$$

$$k_{81}(\eta_1) c_1^{(1)} + k_{82}(\eta_1) c_2^{(1)} + k_{85}(\eta_1) c_1^{(2)} + k_{86}(\eta_1) c_2^{(2)} = u_{20}^{(2)}(\eta_1).$$

Исключая из системы (9) $u_{20}^{(\nu)}(\eta_1)$ ($\nu=1,2$), получаем однородную систему уравнений относительно $c_j^{(1)}$ и $c_j^{(2)}$ (j=1,2):

$$D(\alpha,\beta)\,\tilde{\bar{C}} = 0 \quad \left(\tilde{\bar{C}} = \left(c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}\right)^{\mathrm{T}}\right). \tag{10}$$

Численными методами (программа Mathematica) определяем значения комплексных корней (α_j, β_j) (комплексные собственные значения $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$), при которых определитель системы (10) det D равен нулю.

Результаты численного определения комплексных собственных значений в зависимости от положения упругой связи (η_1). На рис. 2 приведены графики изменения первых двух комплексных корней α_j и β_j при j = 1, 2 для ряда значений η_1 при C = 100 в зависимости от модуля следящей силы P (безразмерной). Критические силы обозначены как P^* .

Из полученных результатов следует, что до значения $\eta_1 < 0.8$ имеет место динамическая потеря устойчивости (флаттер), а при $\eta_1 > 0.8$ — статическая (дивергенция), т.е. при $0 < \tilde{\eta}_1 \leq 0.8$ критическую силу можно определить только из уравнения малых колебаний стержня, а при $\eta_1 \ge 0.8$ — из уравнений равновесия после потери устойчивости.



Рис. 2. Графики изменения α_j и β_j в зависимости от модуля следящей силы и координаты η_1 упругой связи



Рис. 3. Области устойчивых (I $_1$, I $_2$) и неустойчивых (II $_1$, II $_2$) значений (P, η_1)



Рис. 4. Стержень с шарнирной локальной связью

На рис. 3 приведен график зависимости P^* от η_1 , разделяющий на плоскости (P^*, η_1) устойчивые и неустойчивые области параметров (P, η_1) . Области I₁ и I₂ — это области параметров (P, η_1) , при которых потери устойчивости стержня не происходит; области II₁ и II₂ — это области параметров, при которых стержень неустойчив. В области II₁ стержень динамически неустойчив, а в области II₂ — статически неустойчив. При переходе системы из области II₁ в область II₂ при $\eta_1 \ge 0.8$ резко возрастает сила P, которую может выдержать стержень, не теряя статической устойчивости. Например, на рис. 3 при $\eta_1 = 0.79$ критическая сила $P^* = 13.47$, а при $\eta_1 = 0.81 - P^* = 39.04$, т.е. значение критической силы увеличивается почти в 3 раза.

В статье [5] приведены результаты численного исследования устойчивости стержня, нагруженного следящей силой P, для предельного случая ($c \to \infty$), когда имеется шарнирная локальная связь (рис. 4).

В этом предельном случае при $\eta_1 < 0,5$ имеет место динамическая неустойчивость, а при $\eta_1 > 0,5$ — статическая [5].

На рис. 5 приведены графики изменения корней α_j и β_j в зависимости от P при $\eta_1 = 0,51$ для: $c = \infty$ (шарнирная опора, рис. 5, a); c = 150 (рис. 5, δ) и c = 50 (рис. 5, e). При $c = \infty$ имеет место статическая потеря устойчивости, при c = 150 и c = 50 – динамическая. Безразмерная жесткость $c = c_{\text{раз}} (l^3/A_{33})$.

На рис. 6 представлены графики зависимости комплексных корней α_j и β_j от силы притяжения магнита P для ряда значений η_1 , когда участок стержня находится между магнитами (рис. 7). В этом случае при отклонении стержня от прямолинейной формы на него в окрестности точки K действует сила притяжения, направление кото-



Рис. 5. Графики α_j и β_j при разных значениях безразмерной жесткости c

рой совпадает с направлением перемещения в этой точке (в отличие от упругой локальной связи, когда направление силы реакции связи противоположно направлению перемещения). При малых, в сравнении с рис. 6, *a*, перемещениях точки *K* возникающая сила *R* пропорциональна $u_2(\eta_1)$, т.е. $R = \tilde{c}u_2(\eta_1)$. Графики получены для случая, когда $\tilde{c} = 10$. Из полученных результатов следует, что в этом примере в интервале $0 \leq \eta_1 \leq 0.67$ имеет место динамическая потеря устойчивости, а в интервале $\approx 0.7 \leq \eta_1 \leq 1 -$ статическая. Причем статическая потеря устойчивости возможна не при дискретном (одном) значении *P*^{*} (см. графики на рис. 2, *e*,*ж*,*з*), а для следующих интервалов значений *P*: $0 \leq P \leq 2.69$ (рис. 6, *c*); $0 \leq P \leq 7.71$ (рис. 6, *d*); $0 \leq P \leq 9.94$ (рис. 6, *e*). Если стержень "придержать" при увеличении силы *P* до значений $P > P^*$, то возникнут колебания в интервале $P^* \leq P \leq P^{**}$ и при $P = P^{**}$ будет иметь место динамическая потеря устойчивости.



Рис. 6. Графики изменения α_j и β_j в зависимости от силы притяжения магнита и координаты η_1



Рис. 7. Схема расположения участка стержня между магнитами

Устойчивость прямолинейной трубки с локальной упругой связью, заполненной движущейся с постоянной скоростью идеальной жидкостью. Уравнения малых колебаний трубки в плоскости X_1OX_2 .

Запишем систему уравнений

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \tau^2} + 2n_{11}w_0 \frac{\partial \vartheta_3}{\partial \tau} - Q_{10}^{(1)}\Delta M_3 - \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \eta} = \Delta q_2;$$

$$\frac{\partial \Delta M_3}{\partial \eta} + \Delta Q_2 = 0; \quad \frac{\partial \vartheta_3}{\partial \eta} - \Delta M_3 = 0; \quad \frac{\partial u_2}{\partial \eta} - \vartheta_3 = 0,$$
(11)

где $Q_{10}^{(1)} = -n_{11}w_0^2$.

Слагаемое с множителем $2n_{11}w_0$ — это распределенные силы Кориолиса; $n_{11} = \frac{m_{\pi}}{m_{\pi} + m_{\text{труб}}}$; $\Delta q_2 = R\delta (\eta - \eta_1) = -cu_2\delta (\eta - \eta_1)$; давление в жидкости не учитывается.

Систему (11) аналогично системе (1) можно представить в виде

$$A^{(1)}\frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial \tau^2} + A^{(3)}\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \eta} + A^{(2)}\mathbf{Z} = \mathbf{b}\delta\left(\eta - \eta_1\right), \qquad (12)$$

где

Определение комплексных собственных значений. Полагая, что

$$\boldsymbol{Z} = \left(\boldsymbol{Z}_0^{(1)} + i \boldsymbol{Z}_0^{(2)}
ight) e^{(\alpha + i\beta)\tau}, \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_0 e^{(\alpha + i\beta)\tau},$$

получаем из уравнения (12) выражение, аналогичное уравнению (5):

$$\frac{d\mathbf{Z}_{0}}{d\eta} + A\mathbf{Z}_{0} = \mathbf{B}_{0}\delta\left(\eta - \eta_{1}\right), \qquad (13)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} A^{(2)} + (\alpha^{2} - \beta^{2}) A^{(1)} + A^{(3)}\alpha & -(2A^{(1)}\alpha\beta + A^{(3)}\beta); \\ 2A^{(1)}\alpha\beta + A^{(3)}\beta & A^{(2)} + (\alpha^{2} - \beta^{2}) A^{(1)} + A^{(3)}\alpha \end{bmatrix}; \\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{0}^{(1)}, \mathbf{b}_{0}^{(2)} \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}.$$

Алгоритм численного решения уравнения (13) и определения комплексных собственных значений совпадает с алгоритмом решения задачи, приведенной на рис. 1, *a*.

Результаты численного определения комплексных собственных значений в зависимости от положения упругой связи. На рис. 8 приведены графики изменения первых трех комплексных корней α и β

для ряда дискретных значений $\eta_1 = 0.6$; 0,7; 0,8; 1 в зависимости от модуля скорости w_0 при безразмерной жесткости c = 100. При такой жесткости в интервале $0 < \eta_1 \leq 0.7$ имеет место динамическая потеря устойчивости трубки (флаттер, при $w_0 > w^* \quad \alpha_2$ и α_3 становятся положительными (см. рис. 8, a, δ)), а при $\tilde{\eta}_1 < \eta_1 < 1$ — статическая (дивергенция), т.е. первая частота β_1 обращается в нуль и при $w_0 > w^*$ $\alpha_{1,1} > 0$.

В статье [6], посвященной исследованию устойчивости трубки для частного случая, когда упругая связь связана с торцевым сечением (при $\eta_1 = 1$) была допущена ошибка в краевом условии (при $\eta = 1$): было принято, что направление возникающей в сечении при $\eta_1 = 1$ силы (реакции связи) совпадает с направлением перемещения торцевого сечения, в то время как реакция упругой связи направлена против перемещения. Но если участок стальной трубки вблизи торцевого сечения находится между двумя магнитами (см. рис. 7), то при отклонении от прямолинейного состояния возникает сила притяжения, совпадающая по направлению с перемещением. Поэтому в работе [6] точным численным методом получены комплексные собственные значения для прямолинейной трубки с протекающей жидкостью при возникновении



Рис. 8. Графики изменения α_j и β_j в зависимости от модуля скорости w_0 и координаты η_1 упругой связи

при колебаниях сосредоточенной силы притяжения магнитов, совпадающей по направлению с перемещением $u_2(1)$ ($R = \tilde{c}u_2(1)$).

Изложенный в настоящей работе алгоритм исследования устойчивости прямолинейных стержней, нагруженных следящими силами, использующий векторные уравнения малых колебаний (2) и (12), позволяет точным численным методом определять комплексные собственные значения для прямолинейных стержней с локальными связями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Болотин В. В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука, 1961.
- 2. М у х и н О. Н. Устойчивость трубопровода и некоторые методы в неконсервативных задачах // Механика. № 2. 1965.
- Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1967.
- 4. С в е т л и ц к и й В. А. Строительная механика машин. М.: Наука, 2009.
- 5. Лагозинский В. А., Соколов А. И. Устойчивость прямолинейных стержней, нагруженных следящими силами. Проблема прикладной механики, динамики и прочности машин. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005.
- 6. С в е т л и ц к и й В. А., О с т р о у х о в А. В. Влияние краевых условий на динамическую устойчивость прямолинейного трубопровода // Изв. вузов. Машиностроение. – № 2. – 1978.

Статья поступила в редакцию 26.02.2010

Валерий Александрович Светлицкий родился в 1927 г., окончил Московский авиационно-технологический институт (МАТИ) в 1952 г. Д-р техн. наук, профессор кафедры "Прикладная механика" МГТУ им. Н.Э. Баумана. Заслуженный деятель науки и техники России, член Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике, лауреат премии Совета Министров СССР, награжден медалью имени академика Келдыша, член Американского общества инженеров-механиков. Автор 14 монографий и учебников, более 100 научных работ в области механики деформируемых тел и теории прочности машин, статистической механики.

V. A. Svetlitsky (b. 1927) graduated from the Moscow Institute of Aviation Technology in 1952. D. Sc. (Eng), professor of "Applied

Mechanics" Department of the Bauman Moscow State Technical University. RF Honoured Worker of Science and Technology, member of Russian National Committee on theoretical and applied mechanics, Winner of the USSR Council of Ministers Prize, awarded the Academician Keldysh Medal, member of American Society of Mechanical Engineers. Author of 14 monographs and textbooks, of more than 100 publications in the field of mechanics of deformed bogy, machine strength theory, statistic mechanics.

Виталий Вячеславович Романов родился в 1987 г. Студентдипломник кафедры "Прикладная механика" МГТУ им. Н.Э. Баумана.

V.V. Romanov (b. 1987) – student of the Bauman Moscow State Technical University.



