

РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНОЙ ЦИКЛИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОЙ СИСТЕМЫ АМОРТИЗАЦИИ ГРУЗА В КОНТЕЙНЕРЕ ПРИ ПЛОСКИХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ

А.Е. Белкин¹

aefbelkin@bmstu.ru

И.З. Даштиев²

koleso49@mail.ru

Е.А. Никитин¹

nikitin@bmstu.ru

¹ МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

² АО «ЦНИИСМ», г. Хотьково, Московская обл., Российская Федерация

Аннотация

Рассмотрена задача расчета системы поперечной амортизации груза цилиндрической формы, установленного в коаксиальном контейнере. Эта система имеет несколько кольцевых поясов изоляции с циклически симметричным расположением амортизаторов по окружному направлению. Исследована простейшая динамическая модель одного пояса изоляции, образованного полиуретановыми амортизаторами тоннельного типа. Такие амортизаторы имеют высокий коэффициент поглощения энергии и могут работать при весьма большой осадке, сопоставимой с их высотой, что важно в условиях ограниченности пространства между грузом и стенкой контейнера. В рамках предлагаемой модели выполнен гармонический нелинейный анализ плоских колебаний груза при кинематическом возбуждении от контейнера. Предложен метод редуцирования нелинейной циклически симметричной системы с дискретными упругими элементами, позволяющий свести анализ к расчету системы виброизоляции с одной степенью свободы. С помощью процедуры гармонической линеаризации получены амплитудно-частотные характеристики колебаний и графики коэффициентов виброизоляции груза при различных значениях амплитуды возбуждения. Верификация результатов проведена путем сравнения аналитического решения с результатами численного интегрирования для нередуцированной нелинейной системы с двумя степенями свободы. Полученное решение позволяет выбрать параметры пояса виброизоляции, в частности число амортизаторов и их жесткости, в зависимости от условий кинематического возбуждения и допустимой перегрузки

Ключевые слова

Виброизоляция, пояс амортизации, полиуретановые амортизаторы, математическая модель, нелинейная теория колебаний, гармоническая линеаризация

Поступила 03.06.2021

Принята 05.07.2021

© Автор(ы), 2021

Введение. Создание эффективных средств виброзащиты грузов, устанавливаемых в контейнерах, является важной технической задачей. Решение этой задачи часто осложняется жесткими требованиями к габаритным размерам применяемых амортизаторов из-за ограниченности пространства между грузом и стенкой контейнера. При ограниченной высоте амортизаторы должны допускать значительный ход, сопоставимый с их высотой. В таких условиях весьма перспективно применение полиуретановых амортизаторов тоннельного типа (рис. 1, *а*) [1–3], которые могут работать при большой осадке [3] и имеют высокий коэффициент поглощения энергии [4, 5]. Нагрузочные характеристики этих амортизаторов в рабочем диапазоне нелинейны, причем в области небольших деформаций характеристики являются мягкими с переходом к протяженному почти линейному участку малой жесткости, а после достижения некоторой осадки становятся жесткими из-за самоконтакта стенок (рис. 1, *б*). Амортизаторы с характеристиками такого вида обеспечивают высокую энергоемкость виброзащитной системы при ограниченных силах, передаваемых на защищаемый груз [6, 7].

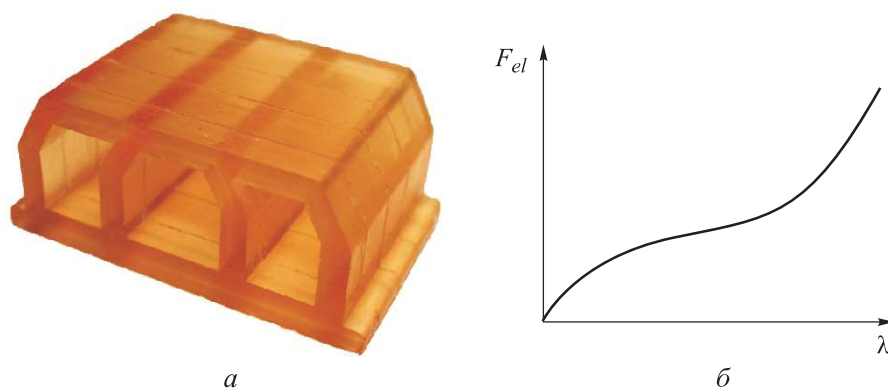


Рис. 1. Полиуретановый амортизатор тоннельного типа (*а*) и его статическая характеристика (*б*):

F_{el} — сила обжатия; λ — осадка амортизатора

Для поперечной амортизации груза цилиндрической формы, помещенного в коаксиальный контейнер, применяют несколько кольцевых поясов изоляции с циклически симметричным расположением амортизаторов по окружному направлению (рис. 2). Амортизаторы устанавливаются попарно в диаметрально противоположных точках контейнера так, что первому амортизатору с углом установки φ_i соответствует второй с углом $\varphi_i + \pi$ (рис. 3). Пара амортизаторов образует двустороннюю связь в направлении соединяющего их диаметра.

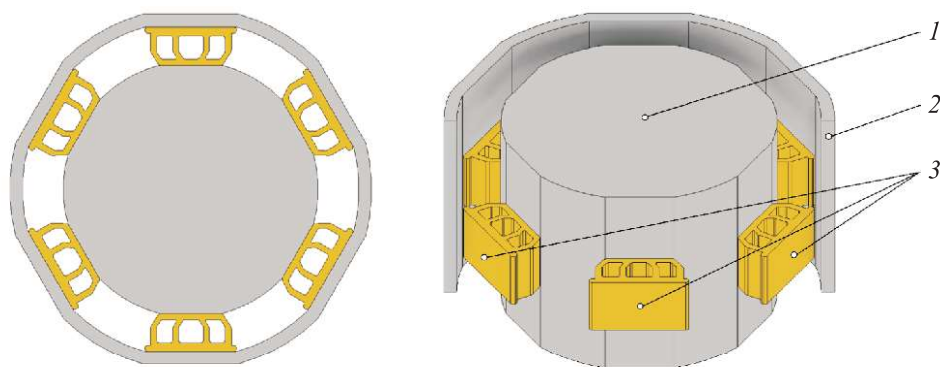


Рис. 2. Циклически симметричный пояс амортизации:

1 — груз; 2 — контейнер; 3 — амортизаторы

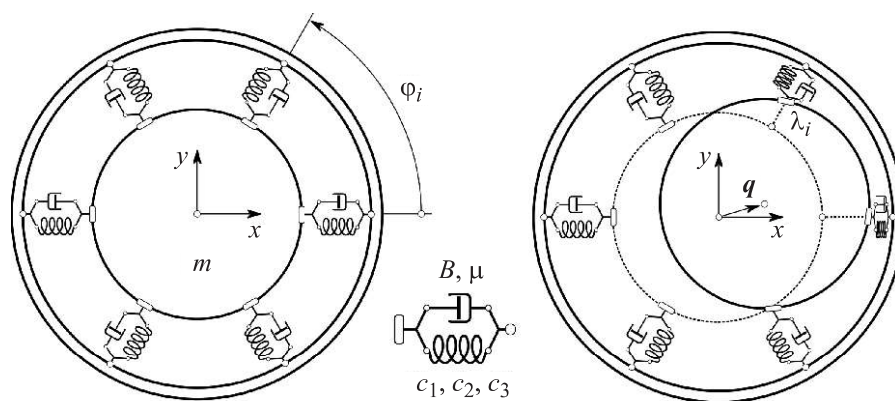


Рис. 3. Модель плоской системы виброизоляции груза

Для «развязки» поперечных и продольных (по отношению к контейнеру) колебаний груза, а также снижения нежелательных деформаций сдвига амортизаторов применяются антифрикционные накладки на контактных поверхностях амортизаторов [8], облегчающие проскальзывание груза.

Анализ подобной системы амортизации применительно к задачам проектирования упругих опор гибких роторов рассматривается в работах [9, 10]. В качестве упругих элементов предлагается использовать расположенные циклически симметрично полимерные секторы [10]. Расчеты в этой работе выполнены с применением линейной теории вязкоупругости.

В настоящей работе исследуется эффективность системы поперечной амортизации груза при гармонических колебаниях контейнера. Рассматривается простейшая модель системы (см. рис. 3), в которой движения

контейнера и груза являются плоскими поступательными. Путем осреднения коэффициентов жесткости и демпфирования по окружности кольцевого пояса изоляции осуществляется редуцирование модели к системе с одной степенью свободы, что предельно упрощает расчет. Кроме того, такое редуцирование служит основанием для экспериментального исследования характеристик виброзащитной системы на модели с одной степенью свободы [11, 12].

Уравнение движения. Гармоническая линеаризация. При составлении уравнений движения будем учитывать только линейные смещения контейнера и груза в направлении осей x и y (см. рис. 3). Предполагаем, что ввиду применения антифрикционных накладок на контактных поверхностях амортизаторов тангенциальные составляющие их реакций пренебрежимо малы по сравнению с нормальными составляющими. В этом случае уравнения движения амортизируемого груза при кинематическом возбуждении записываются в виде

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_x + \sum_{i=1}^N F_i(\lambda_i, \dot{\lambda}_i) \alpha_i &= -m\ddot{u}_x; \\ m\ddot{q}_y + \sum_{i=1}^N F_i(\lambda_i, \dot{\lambda}_i) \beta_i &= -m\ddot{u}_y; \\ \lambda_i &= q_x \alpha_i + q_y \beta_i, \end{aligned} \quad (1)$$

где m — масса груза; q_x, q_y — смещения груза относительно контейнера; u_x, u_y — смещения контейнера; N — число пар амортизаторов; $F_i(\lambda_i, \dot{\lambda}_i)$ — реакция i -й пары амортизаторов при осадке одного из них на λ_i ; $\alpha_i = \cos \varphi_i$, $\beta_i = \sin \varphi_i$ — направляющие косинусы, характеризующие угловое положение пары амортизаторов.

Рассматривая гармонические вибрации контейнера $u_x = U_x \sin \omega t$ и $u_y = U_y \sin \omega t$, отклик системы будем искать также в форме гармонических колебаний:

$$\begin{aligned} q_x &= q_x^s \sin \omega t - q_x^c \cos \omega t = a_x \sin(\omega t - \psi_x); \\ q_y &= q_y^s \sin \omega t - q_y^c \cos \omega t = a_y \sin(\omega t - \psi_y). \end{aligned} \quad (2)$$

По такому же гармоническому закону изменяются осадки амортизаторов:

$$\lambda_i = (q_x^s \alpha_i + q_y^s \beta_i) \sin \omega t - (q_x^c \alpha_i + q_y^c \beta_i) \cos \omega t = \Lambda_i \sin(\omega t - \psi_i), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_i &= \sqrt{(q_x^s \alpha_i + q_y^s \beta_i)^2 + (q_x^c \alpha_i + q_y^c \beta_i)^2} = \\ &= \sqrt{a_x^2 \alpha_i^2 + 2a_x a_y \cos(\psi_x - \psi_y) \alpha_i \beta_i + a_y^2 \beta_i^2} \end{aligned} \quad (4)$$

— амплитуды осадок.

Для формулировки зависимости восстанавливающей силы $F_i(\lambda_i, \dot{\lambda}_i)$ от осадки используем результаты статических и динамических испытаний амортизаторов [11, 12]. Считаем, что пара установленных навстречу друг другу амортизаторов образует двустороннюю связь с симметричной характеристикой. Упругую часть реакции (см. рис. 1) аппроксимируем кубическим полиномом

$$F_i^{el}(\lambda_i) = c_1 \lambda_i - c_2 \lambda_i^2 \operatorname{sign}(\lambda_i) + c_3 \lambda_i^3, \quad (5)$$

где c_1, c_2, c_3 — коэффициенты жесткости, получаемые путем обработки экспериментальной статической характеристики одиночного амортизатора; функция $\operatorname{sign}(\lambda_i)$ позволяет единообразно записать реакцию пары амортизаторов при положительных и отрицательных осадках λ_i .

Для неупругой части реакции примем модель гистерезисного внутреннего трения, предложенную для гармонических колебаний Я.Г. Пановко [13]:

$$F_i^{inel}(\lambda_i, \dot{\lambda}_i) = B \Lambda_i^\mu \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_i}{\Lambda_i}\right)^2} \operatorname{sign} \dot{\lambda}_i, \quad (6)$$

где B, μ — параметры модели, подбираемые на основе экспериментальных данных о коэффициентах поглощения энергии пары амортизаторов [12].

Полную реакцию связи определим сложением упругой и неупругой частей:

$$F_i(\lambda_i, \dot{\lambda}_i) = F_i^{el}(\lambda_i) + F_i^{inel}(\lambda_i, \dot{\lambda}_i). \quad (7)$$

Для приближенного решения уравнений движения (1) применим метод гармонической линеаризации [14]. Заменяем нелинейную функцию силы $F_i(\lambda_i, \dot{\lambda}_i)$ ее первой гармоникой разложения в ряд Фурье:

$$F_i(\lambda_i, \dot{\lambda}_i) \approx c_{eq}(\Lambda_i) \lambda_i + d_{eq}(\Lambda_i, \omega) \dot{\lambda}_i; \quad (8)$$

здесь коэффициенты линеаризации определяются по формулам:

$$c_{eq}(\Lambda_i) = \frac{1}{\pi\Lambda_i} \int_0^{2\pi/\omega} F_i^{el}(\Lambda_i \sin \xi) \sin \xi d\xi; \quad (9)$$

$$d_{eq}(\Lambda_i, \omega) = -\frac{1}{\pi\omega\Lambda_i} \int_0^{2\pi/\omega} F_i^{inel}(\Lambda_i \sin \xi, \omega\Lambda_i \cos \xi) \cos \xi d\xi.$$

Для выбранных аппроксимаций (5), (6) коэффициенты имеют вид

$$c_{eq}(\Lambda_i) = c_1 - \frac{8}{3\pi} c_2 \Lambda_i + \frac{3}{4} c_3 \Lambda_i^2; \quad d_{eq}(\Lambda_i, \omega) = \frac{B\Lambda_i^{\mu-1}}{\omega}. \quad (10)$$

Подставив соотношения (8) в уравнения движения (1), получим линеаризованные уравнения гармонических колебаний груза в контейнере:

$$m\ddot{q}_x + \sum_{i=1}^N [c_{eq}(\Lambda_i)\lambda_i + d_{eq}(\Lambda_i, \omega)\dot{\lambda}_i] \alpha_i = P_x \sin \omega t; \quad (11)$$

$$m\ddot{q}_y + \sum_{i=1}^N [c_{eq}(\Lambda_i)\lambda_i + d_{eq}(\Lambda_i, \omega)\dot{\lambda}_i] \beta_i = P_y \sin \omega t,$$

где $P_x = m\omega^2 U_x$; $P_y = m\omega^2 U_y$ — амплитуды сил инерции груза в переносном движении.

В уравнениях (11) перейдем от осадок амортизаторов к смещениям груза и представим итоговые уравнения в векторно-матричной форме:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [D]\{\dot{q}\} + [C]\{q\} = \{P\} \sin \omega t, \quad (12)$$

где $\{q\} = \{q_x, q_y\}$ — вектор смещений; $\{P\} = \{P_x, P_y\}$ — вектор амплитуд сил;

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}; \quad [D] = \begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} \\ d_{yx} & d_{yy} \end{bmatrix}; \quad [C] = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix}$$

— матрицы масс, демпфирования и жесткости соответственно.

Элементы матриц $[C]$ и $[D]$ определяются путем суммирования произведений коэффициентов линеаризации (10) и комбинаций направляющих косинусов:

$$c_{xx} = \sum_{i=1}^N c_{eq}(\Lambda_i) \alpha_i^2; \quad c_{xy} = c_{yx} = \sum_{i=1}^N c_{eq}(\Lambda_i) \alpha_i \beta_i; \quad c_{yy} = \sum_{i=1}^N c_{eq}(\Lambda_i) \beta_i^2; \quad (13)$$

$$d_{xx} = \sum_{i=1}^N d_{eq}(\Lambda_i, \omega) \alpha_i^2; \quad d_{xy} = d_{yx} = \sum_{i=1}^N d_{eq}(\Lambda_i, \omega) \alpha_i \beta_i; \quad (14)$$

$$d_{yy} = \sum_{i=1}^N d_{eq}(\Lambda_i, \omega) \beta_i^2.$$

Решение системы (12) отыскивается в виде (2). После отделения функций времени приходим к системе нелинейных уравнений относительно амплитуд перемещений:

$$\begin{aligned} & ([C] - \omega^2 [M]) \{q\}^s + \omega [D] \{q\}^c = \{P\}; \\ & -\omega [D] \{q\}^s + ([C] - \omega^2 [M]) \{q\}^c = \{0\}, \end{aligned} \quad (15)$$

в которых элементы матриц жесткости и демпфирования зависят от искомого перемещений $\{q\}^s = \{q_x^s, q_y^s\}$ и $\{q\}^c = \{q_x^c, q_y^c\}$.

Вычисление коэффициентов жесткости и демпфирования для кольцевого пояса амортизаторов. При вычислении этих коэффициентов по формулам (9), (13) и (14) образуются следующие суммы:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2; \quad \sum_{i=1}^N \Lambda_i \alpha_i^2; \quad \sum_{i=1}^N \Lambda_i^2 \alpha_i^2,$$

а также некоторые другие, подобные им. Если амортизаторы размещены равномерно по окружности пояса, то необходимые суммы могут быть получены с помощью осреднения слагаемых, например:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \approx N \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} N;$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \beta_i^2 \approx N \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{8} N;$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i^4 \approx N \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{3}{8} N;$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Lambda_i^2 \alpha_i^2 &= a_x^2 \sum_{i=1}^N \alpha_i^4 + 2a_x a_y \cos(\psi_x - \psi_y) \sum_{i=1}^N \alpha_i^3 \beta_i + \\ &+ a_y^2 \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \beta_i^2 \approx N \left(\frac{3}{8} a_x^2 + \frac{1}{8} a_y^2 \right). \end{aligned}$$

При вычислении сумм, содержащих первые степени осадок Λ_i , возникают некоторые затруднения, поскольку выражение (4) для Λ_i не позволяет образовать суммы направляющих косинусов, подобные вычисленным ранее. Для преодоления этих затруднений предлагается следующий прием.

В случае линейной системы фазы колебаний ψ_x, ψ_y в законах движения (2) одинаковы. Предположим, что и для рассматриваемой нели-

нейной системы фазы различаются незначительно, поэтому можно принять $\cos(\psi_x - \psi_y) \approx 1$. Тогда из формулы (4) следует упрощенное выражение для амплитуды осадки: $\Lambda_i \approx |a_x \alpha_i + a_y \beta_i|$.

Используя это выражение и применяя процедуру осреднения, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \Lambda_i \alpha_i^2 &\approx N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |a_x \cos \varphi + a_y \sin \varphi| \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= N \frac{2}{3\pi} \left(\sqrt{a_x^2 + a_y^2} + \frac{a_x^2}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \right). \end{aligned}$$

Аналогичным образом вычисляются и другие суммы:

$$\sum_{i=1}^N \Lambda_i \alpha_i \beta_i; \quad \sum_{i=1}^N \Lambda_i \beta_i^2.$$

В результате для элементов матрицы жесткости кольцевого пояса получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} c_{xx} &= \frac{1}{2} Nc_1 - \frac{16}{9\pi^2} Nc_2 a^{-1} (2a_x^2 + a_y^2) + \frac{3}{32} Nc_3 (3a_x^2 + a_y^2); \\ c_{xy} &= -\frac{16}{9\pi^2} Nc_2 a^{-1} a_x a_y + \frac{3}{16} Nc_3 a_x a_y \cos(\psi_x - \psi_y); \\ c_{yy} &= \frac{1}{2} Nc_1 - \frac{16}{9\pi^2} Nc_2 a^{-1} (a_x^2 + 2a_y^2) + \frac{3}{32} Nc_3 (a_x^2 + 3a_y^2), \end{aligned} \quad (16)$$

где $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

Значения коэффициентов демпфирования зависят от выбора параметра μ в модели гистерезисного трения (6). Следуя работе [12], в которой настройка модели проводилась по экспериментально определенному коэффициенту поглощения, примем $\mu = 3$. В этом случае вычисление коэффициентов демпфирования (14) осуществляется особенно просто:

$$\begin{aligned} d_{xx} &= \frac{B}{8\omega} N (3a_x^2 + a_y^2); \quad d_{xy} = \frac{B}{4\omega} N a_x a_y \cos(\psi_x - \psi_y); \\ d_{yy} &= \frac{B}{8\omega} N (a_x^2 + 3a_y^2). \end{aligned} \quad (17)$$

Таким образом, все коэффициенты системы уравнений (15) определены как функции искомых амплитуд колебаний.

Определение амплитуд колебаний и коэффициента виброизоляции груза. В результате примененной процедуры осреднения механические характеристики пояса виброизоляции (16), (17) перестают зависеть от конкретных углов установки амортизаторов φ_i (см. рис. 3). Это означает, что пояс наделяется свойством осевой симметрии. Любое направление, в котором на груз действует сила инерции переносного движения, является плоскостью симметрии механической системы, поэтому колебания груза происходят в направлении возбуждения. Таким образом, система амортизации редуцируется к модели с одной степенью свободы. Справедливость этого утверждения может быть доказана простыми выкладками.

Совместим ось x с направлением кинематического возбуждения. Тогда в уравнениях (15) следует считать $\{P\} = \{P_x, 0\}$. Предположим, что смещение в ортогональном направлении y отсутствует, т. е. амплитуда колебаний $a_y = 0$. В этом случае смешанные коэффициенты жесткости и демпфирования обращаются в ноль, т. е. $c_{xy} = c_{yx} = 0$, $d_{xy} = d_{yx} = 0$. Система четырех уравнений (15) распадается на две несвязанные между собой системы. Первая является неоднородной

$$\begin{aligned} (c_{xx} - m\omega^2)q_x^s + \omega d_{xx}q_x^c &= P_x; \\ -\omega d_{xx}q_x^s + (c_{xx} - m\omega^2)q_x^c &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

а вторая — однородной

$$\begin{aligned} (c_{yy} - m\omega^2)q_y^s + \omega d_{yy}q_y^c &= 0; \\ -\omega d_{yy}q_y^s + (c_{yy} - m\omega^2)q_y^c &= 0, \end{aligned}$$

с тривиальным решением $q_y^s = q_y^c = 0$, согласующимся с исходным предположением $a_y = 0$.

Следовательно, расчет циклически симметричной системы амортизации сводится к решению уравнений движения (18) для системы с одной степенью свободы. Коэффициенты уравнений (18) определяются по формулам, упрощенным по сравнению с (16) и (17):

$$c_{xx} = \frac{1}{2}N \left(c_1 - \frac{64}{9\pi^2}c_2 a_x + \frac{9}{16}c_3 a_x^2 \right); \quad d_{xx} = \frac{3B}{8\omega}N a_x^2. \quad (19)$$

Из уравнений (18) можно получить значение амплитуды и фазы носительного движения груза:

$$a_x = \sqrt{(q_x^s)^2 + (q_x^c)^2} = \frac{\omega^2 U_x}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega d_{xx} / m)^2}}; \quad (20)$$

$$\operatorname{tg} \psi_x = q_x^c / q_x^s = \frac{\omega d_{xx}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad (21)$$

где $\omega_0(a_x) = p_0 \sqrt{1 - \frac{64}{9\pi^2} \frac{c_2}{c_1} a_x + \frac{9}{16} \frac{c_3}{c_1} a_x^2}$ — резонансная частота, зависящая от амплитуды (уравнение скелетной кривой); $p_0 = \sqrt{Nc_1 / 2m}$ — частота малых колебаний системы около положения равновесия.

Очевидно, что в формулах (20), (21) нет необходимости указывать индекс направления внешнего воздействия, поэтому далее он будет опущен.

В результате сложения законов переносного и относительного движений могут быть определены амплитуда абсолютных смещений груза A и коэффициент его виброизоляции β [15]:

$$A = \beta U, \quad \beta = \sqrt{\frac{\omega_0^4(a) + (\hat{B}a^2/m)^2}{(\omega_0^2(a) - \omega^2)^2 + (\hat{B}a^2/m)^2}}, \quad (22)$$

где $\hat{B} = \frac{3}{8} NB$.

Если сравнить жесткость c_{xx} кольцевого пояса, выраженную формулой (19), с жесткостью c_{eq} пары амортизаторов (10), то можно установить характеристики одиночного виброизолятора, эквивалентного кольцевой системе:

$$\hat{c}_1 = \frac{1}{2} Nc_1; \quad \hat{c}_2 = \frac{4}{3\pi} Nc_2; \quad \hat{c}_3 = \frac{3}{8} Nc_3. \quad (23)$$

Аналогично устанавливается эквивалентный коэффициент демпфирования \hat{B} .

Следовательно, модель циклически симметричной системы изоляции сводится к динамически эквивалентной схеме установки груза на двух амортизаторах. Расчет и экспериментальные исследования этой схемы выполнены в работах [11, 12]. Полученные для пары амортизаторов результаты могут быть распространены на пояс амортизации путем простого масштабирования.

Для удобства представления результатов перейдем к безразмерным величинам. Приняв в качестве масштаба перемещений статическую осад-

ку амортизатора с линейной упругой характеристикой $a_{\text{dim}} = mg / c_1$, введем безразмерную амплитуду колебаний груза $\zeta = a / a_{\text{dim}}$.

Частоту линейной системы p_0 используем для масштабирования частоты возбуждения $\Omega = \omega / p_0$ и представления скелетной кривой:

$$\Omega_0 = \omega_0 / p_0 = \sqrt{1 - \frac{64}{9\pi^2} \gamma_1 \zeta + \frac{9}{16} \gamma_2 \zeta^2}, \quad (24)$$

где $\gamma_1 = c_2 a_{\text{dim}} / c_1$; $\gamma_2 = c_3 a_{\text{dim}}^2 / c_1$.

Масштабированию подлежат коэффициент демпфирования

$$B = \frac{\hat{B} a_{\text{dim}}^2}{m p_0^2}$$

и амплитуда кинематического возбуждения

$$U = U / a_{\text{dim}}.$$

Тогда безразмерная амплитуда колебаний груза (20) будет равна

$$\zeta = \frac{\Omega^2 U}{\sqrt{(\Omega_0^2 - \Omega^2)^2 + B^2 \zeta^4}}. \quad (25)$$

Коэффициент виброизоляции груза (22), выраженный через масштабированные величины, имеет вид

$$\beta = \sqrt{\frac{\Omega_0^4 + B^2 \zeta^4}{(\Omega_0^2 - \Omega^2)^2 + B^2 \zeta^4}}. \quad (26)$$

Построение частотных характеристик колебаний груза на двух амортизаторах с рассматриваемой нелинейностью подробно изложено в работе [12]. Не останавливаясь на алгоритме вычислений, приведем результаты расчета для пояса амортизации, состоящего из $N = 6$ пар полиуретановых амортизаторов, параметры которых взяты из работы [12] и приведены в табл. 1. На них установлен груз в виде кругового диска массой $m = 40$ кг. Значения безразмерных параметров, необходимые для вычислений по формулам (24)–(26), приведены в табл. 2.

Таблица 1

Параметры упругих и диссипативных характеристик амортизатора

Марка полиуретана	c_1 , Н/мм	c_2 , Н/мм ²	c_3 , Н/мм ³	B , Н/мм ³	μ
СУРЭЛ ТФ-228	215	34,7	2,16	0,5	3

Масштабы безразмерных переменных и безразмерные комплексы

p_0 , рад/с	a_{dim} , мм	γ_1	γ_2	B
127	1,83	0,295	0,0336	0,00584

Для оценки эффективности системы амортизации наибольшее значение имеют амплитуда относительного движения груза в контейнере (25), поскольку важен безударный режим колебаний, и коэффициент виброизоляции (26), являющийся отношением амплитуд ускорений груза и контейнера.

Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) относительного движения груза приведены на рис. 4, а. Здесь же штриховой показана скелетная кривая системы. Из графиков следует, что при больших частотах амплитуды относительных смещений груза ζ «отслеживают» амплитуды кинематического возбуждения U и слабо зависят от частоты.

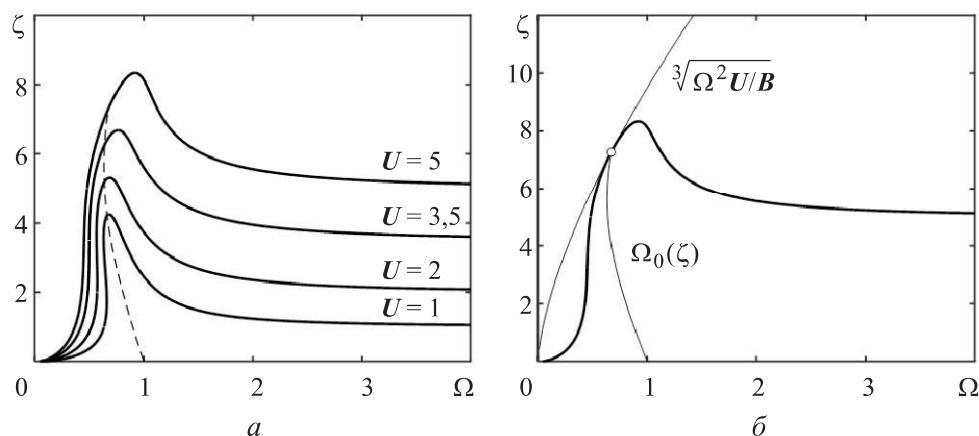


Рис. 4. Амплитудно-частотная характеристика относительного смещения груза при различных значениях безразмерной амплитуды возбуждения U (а); сдвиг пикового значения амплитуды груза (б)

Смещение пика АЧХ вправо от скелетной кривой увеличивается вместе с амплитудой возбуждения (рис. 4, б). Чтобы объяснить этот факт, вычислим работу возбуждающей силы за период стационарных колебаний

$$L = \int_0^{2\pi/\omega} P \dot{q} dt = \pi m \omega^2 U a \sin \psi$$

и энергию, рассеиваемую системой амортизации,

$$W = \int_0^{2\pi/\omega} d_{xx} \dot{q}^2 dt = \pi \hat{B} a^4.$$

Из условия энергетического баланса следует $L = W$. Поскольку $\sin \psi \leq 1$ (равенство достигается при резонансе), то получаем неравенство

$$\pi \hat{B} a^4 \leq \pi m \omega^2 U a$$

и после масштабирования — оценку амплитуды

$$\zeta \leq \sqrt[3]{\Omega^2 U / B}. \quad (27)$$

Граница этого неравенства для $U = 5$ приведена на рис. 4, б. Видно, что она является касательной к графику АЧХ и в точке касания пересекает скелетную кривую. При большом угле наклона графика (27) в этой точке происходит смещение пика АЧХ вправо. Отметим, что в случае силового механизма возбуждения колебаний линия энергетического баланса представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс [14], и точка пересечения этой прямой со скелетной кривой совпадает с пиком АЧХ.

График зависимости коэффициента виброизоляции от частоты при различных значениях амплитуды возбуждения U показан на рис. 5, а. Реальная виброизоляция наблюдается для режимов с $\beta < 1$.

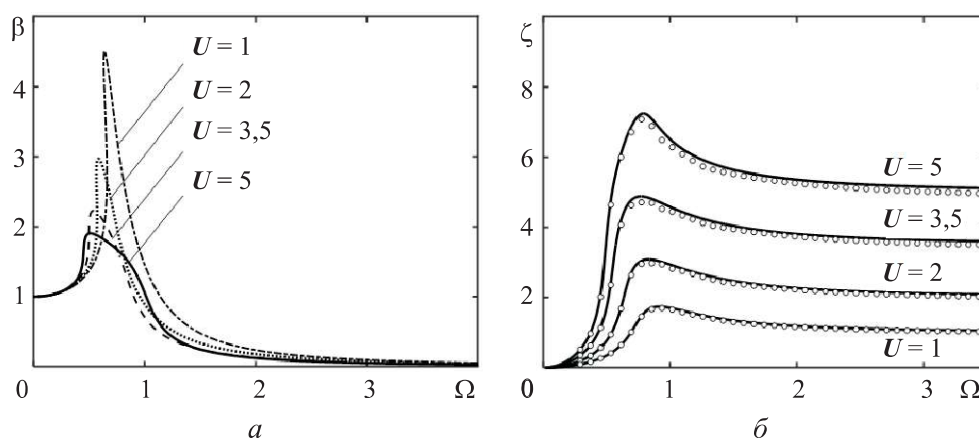


Рис. 5. Коэффициенты виброизоляции груза (а) и сравнение АЧХ редуцированной (сплошные кривые) и полной (точки) систем при различных значениях безразмерной амплитуды возбуждения U (б)

Полученное решение позволяет выбрать параметры пояса виброизоляции, в частности число пар амортизаторов и их жесткости, в зависимости от условий кинематического возбуждения и допустимой перегрузки.

Численное интегрирование уравнений движения. Для проверки аналитического решения выполнено численное интегрирование нелинейных уравнений движения груза в контейнере (1) для системы с ше-

стью парами амортизаторов. Упругая часть восстанавливающей силы взята в форме (5) с коэффициентами жесткости из табл. 1. Поскольку использование модели внутреннего трения (6) при интегрировании затруднено (так как выражение для силы сопротивления содержит заранее неизвестную амплитуду колебаний груза), то принята модель вязкого трения, пропорционального скорости осадки амортизатора:

$$F_i^{inel}(\dot{\lambda}_i) = d\dot{\lambda}_i.$$

Масштабированный коэффициент демпфирования

$$\delta = \frac{Nd}{2mp_0}.$$

Для тестовых расчетов принято значение $\delta = 0,5$. Подсчет сумм направляющих косинусов, входящих в уравнения, велся без процедуры осреднения по окружному направлению.

Для интегрирования использовался метод Рунге — Кутты 4-го порядка точности с адаптивным шагом, встроенный в комплекс MATLAB. Амплитудно-частотные характеристики колебаний груза (см. точки на рис. 5, б) получены путем построения диаграмм Пуанкаре по экстремумам временных реализаций установившегося движения груза.

Аналитическое решение для редуцированной системы при вязком трении имеет вид

$$\zeta = \frac{\Omega^2 U}{\sqrt{(\Omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \Omega^2 \delta^2}}.$$

Это решение показано на рис. 5, б сплошными кривыми.

Полученные результаты хорошо согласуются, что свидетельствует об адекватности предложенного метода. При численном решении не были обнаружены суб- и супергармонические резонансы в области $\Omega \in [0; 3]$. Это обстоятельство позволяет достичь высокой точности при аналитическом решении лишь с одной гармоникой.

Выводы. Предложена математическая модель плоской циклически симметричной системы виброизоляции груза цилиндрической формы в коаксиальном контейнере с помощью полиуретановых амортизаторов. Путем гармонической линеаризации уравнений движения получена система нелинейных алгебраических уравнений гармонического баланса. Осреднением коэффициентов жесткости и демпфирования по окружности кольцевого пояса изоляции осуществлено редуцирование модели

к системе с одной степенью свободы. Получены простые соотношения для характеристик виброизолятора, динамически эквивалентного кольцевому поясу. Верификация модели проведена сравнением АЧХ плоской системы и эквивалентной одностепенной. Предложенный метод расчета плоских циклически симметричных нелинейных систем виброизоляции может быть использован в инженерной практике на начальном этапе проектирования систем защиты ответственных грузов от внешних воздействий.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Mendelsohn M.A., Rudd G.E., Rosenblatt G.B. Chemical and engineering properties of polyurethane isolator pads. *Ind. Eng. Chem. Prod. Res. Dev.*, 1975, vol. 14, no. 3, pp. 181–189. DOI: <https://doi.org/10.1021/i360055a011>
- [2] Zhao V., Wang M.J. Size effect on load bearing force of rubber isolator with pre-buckled struts. *2nd Int. Conf. Comp. Eng. Technol.*, 2010, vol. 5, pp. 522–526. DOI: <https://doi.org/10.1109/ICCET.2010.5486177>
- [3] Алашеев В.И., Белкин А.Е., Бобров А.В. и др. Анализ работы полиуретанового амортизатора тоннельного типа в условиях ударного нагружения. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2017, № 5, с. 4–13. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2017-5-4-13>
- [4] Bek M., Betjes J., von Bernstorff B.S., et al. Viscoelasticity of new generation thermoplastic polyurethane vibration isolators. *Phys. Fluids*, 2017, vol. 29, no. 12. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5000413>
- [5] Wu J.H., Li C.H., Chiu H.T., et al. Anti-vibration and vibration isolator performance of poly (styrene-butadiene-styrene) / ester-type polyurethane thermoplastic elastomers. *Polym. Adv. Technol.*, 2010, vol. 21, no. 3, pp. 164–178. DOI: <https://doi.org/10.1002/pat.1411>
- [6] Lv Z.Q., Shu L.H. Shock mechanics model and characteristic analysis of polyurethane isolator with displacement restrictor. *Adv. Mat. Res.*, 2012, vol. 503-504, pp. 972–977. DOI: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.503-504.972>
- [7] Рагульскис К.М., ред. Виброзащитные системы с квази нулевой жесткостью. Л., Машиностроение, 1986.
- [8] Круглов Ю.А., Храмов Б.А., Кабанов Э.Н. Системы ударовиброзащиты ракет, аппаратуры и оборудования. СПб., Изд-во БГТУ «Военмех», 2010.
- [9] Atzrodt H., Mayer D., Melz T. Reduction of bearing vibrations with shunt damping. *Proc. 16th ICSV*, 2009, p. 7.
- [10] Dutt J.K., Toi T. Rotor vibration reduction with polymeric sectors. *J. Sound Vib.*, 2003, vol. 262, no. 4, pp. 769–793. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)01081-7](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01081-7)

- [11] Белкин А.Е., Даштиев И.З., Никитин Е.А. и др. Физическое и математическое моделирование виброизоляции груза в контейнере с применением полиуретановых амортизаторов. *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*, 2018, № 7, с. 11–19. DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2018-7-11-19>
- [12] Белкин А.Е., Даштиев И.З., Никитин Е.А. Нелинейный анализ виброизоляции груза, установленного в контейнере на полиуретановых амортизаторах тоннельного типа. *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2019, № 7, с. 88–96. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0235711919070034>
- [13] Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М., ФИЗМАТГИЗ, 1960.
- [14] Коловский М.З. Нелинейная теория виброзащитных систем. М., Наука, 1966.
- [15] Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М., URSS, 2017.

Белкин Александр Ефимович — д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Даштиев Идрис Зилфикарович — д-р техн. наук, заместитель главного конструктора АО «ЦНИИСМ» (Российская Федерация, 141371, г. Хотьково, Московская обл., ул. Заводская, д. 1).

Никитин Егор Александрович — аспирант, ассистент кафедры «Прикладная механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана (Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1).

Просьба ссылаться на эту статью следующим образом:

Белкин А.Е., Даштиев И.З., Никитин Е.А. Расчет нелинейной циклически симметричной системы амортизации груза в контейнере при плоских гармонических колебаниях. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*, 2021, № 4 (139), с. 32–50. DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3941-2021-4-32-50>

**ANALYSIS OF NONLINEAR CYCLICALLY
SYMMETRIC ISOLATION SYSTEM OF A CARGO
IN A CONTAINER UNDER PLANE HARMONIC VIBRATIONS**

A.E. Belkin¹

aefbelkin@bmstu.ru

I.Z. Dashtiev²

koleso49@mail.ru

E.A. Nikitin¹

nikitin@bmstu.ru

¹ **Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation**

² **АО “TsNIISM”, Khotkovo, Moscow Region, Russian Federation**

Abstract

The problem of calculating the system of a cylindrical shaped load transverse damping installed in a coaxial container is considered. This system has several annular belts of insulation with a cyclically symmetric arrangement of shock absorbers along the circumferential direction. A simple dynamic model of one insulation belt formed by polyurethane tunnel-type shock absorbers is investigated. Such shock absorbers have a high energy absorption coefficient and can operate at very high drafts comparable to their height, which is important when the space between the cargo and the container wall is limited. Within the proposed model framework, a harmonic nonlinear analysis of cargo plane oscillations under kinematic excitation coming from the container is considered. A method for reducing a nonlinear cyclically symmetric system with discrete elastic elements, which allows limiting the analysis to the calculation of a vibration isolation system with one degree of freedom, is proposed. Using the harmonic linearization procedure, the amplitude-frequency characteristics of oscillations and plots of vibration isolation coefficients of cargo at different values of excitation amplitude have been obtained. The results are verified by comparing the analytical solution with the results of numerical integration for a non-reduced nonlinear system with two degrees of freedom. The obtained solution allows choosing the vibration isolation belt parameters, in particular the number of shock absorbers and their stiffness, depending on the conditions of kinematic excitation and permissible overload

Keywords

Vibration isolation, isolation ring, polyurethane shock absorbers, mathematical model, nonlinear vibration theory, harmonic linearization

Received 03.06.2021

Accepted 05.07.2021

© Author(s), 2021

REFERENCES

- [1] Mendelsohn M.A., Rudd G.E., Rosenblatt G.B. Chemical and engineering properties of polyurethane isolator pads. *Ind. Eng. Chem. Prod. Res. Dev.*, 1975, vol. 14, no. 3, pp. 181–189. DOI: <https://doi.org/10.1021/i360055a011>
- [2] Zhao V., Wang M.J. Size effect on load bearing force of rubber isolator with pre-buckled struts. *2nd Int. Conf. Comp. Eng. Technol.*, 2010, vol. 5, pp. 522–526. DOI: <https://doi.org/10.1109/ICCET.2010.5486177>
- [3] Alasheev V.I., Belkin A.E., Bobrov A.V., et al. The analysis of a polyurethane tunnel-type shock absorber operating under shock loading. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* [BMSTU Journal of Mechanical Engineering], 2017, no. 5, pp. 4–13 (in Russ.). DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2017-5-4-13>

- [4] Bek M., Betjes J., von Bernstorff B.S., et al. Viscoelasticity of new generation thermoplastic polyurethane vibration isolators. *Phys. Fluids*, 2017, vol. 29, no. 12.
DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5000413>
- [5] Wu J.H., Li C.H., Chiu H.T., et al. Anti-vibration and vibration isolator performance of poly (styrene-butadiene-styrene) / ester-type polyurethane thermoplastic elastomers. *Polym. Adv. Technol.*, 2010, vol. 21, no. 3, pp. 164–178.
DOI: <https://doi.org/10.1002/pat.1411>
- [6] Lv Z.Q., Shu L.H. Shock mechanics model and characteristic analysis of polyurethane isolator with displacement restrictor. *Adv. Mat. Res.*, 2012, vol. 503-504, pp. 972–977. DOI: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.503-504.972>
- [7] Ragul'skis K.M., ed. Vibrozashchitnye sistemy s kvazinulevoy zhestkost'yu [Vibration isolation systems with quasi-zero stiffness]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1986.
- [8] Kruglov Yu.A., Khramov B.A., Kabanov E.N. Sistemy udarovibrozaschity raket, apparatury i oborudovaniya [Shock and vibration isolation systems of missiles, equipment and rigs]. St. Petersburg, BGTU "Voenmekh" Publ., 2010.
- [9] Atzrodt H., Mayer D., Melz T. Reduction of bearing vibrations with shunt damping. *Proc. 16th ICSV*, 2009, p. 7.
- [10] Dutt J.K., Toi T. Rotor vibration reduction with polymeric sectors. *J. Sound Vib.*, 2003, vol. 262, no. 4, pp. 769–793.
DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)01081-7](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01081-7)
- [11] Belkin A.E., Dashtiev I.Z., Nikitin E.A., et al. Physical and mathematical modeling of vibration isolation for cargo in a container with polyurethane shock absorbers. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* [BMSTU Journal of Mechanical Engineering], 2018, no. 7, pp. 11–19 (in Russ.).
DOI: <http://dx.doi.org/10.18698/0536-1044-2018-7-11-19>
- [12] Belkin A.E., Dashtiev I.Z., Nikitin E.A. Nonlinear analysis of vibration isolation of a cargo, mounted in a container on tunnel-type polyurethane shock absorbers. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin* [Journal of Machinery Manufacture and Reliability], 2019, no. 7, pp. 88–96 (in Russ.).
- [13] Panovko Ya.G. Vnutrennee trenie pri kolebaniyakh uprugikh system [Internal friction in vibrating elastic systems]. Moscow, FIZMATGIZ Publ., 1960.
- [14] Kolovskiy M.Z. Nelineynaya teoriya vibrozashchitnykh system [Nonlinear theory of vibration protection systems]. Moscow, Nauka Publ., 1966.
- [15] Biderman V.L. Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy [Mechanical vibrations theory]. Moscow, URSS Publ., 2017.

Belkin A.E. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Department of Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Dashtiev I.Z. — Dr. Sc. (Eng.), Deputy Chief Designer, AO “TsNIISM” (Zavodskaya ul. 1, Khotkovo, Moscow Region, 141371 Russian Federation).

Nikitin E.A. — Post-Graduate Student, Assistant, Department of the Applied Mechanics, Bauman Moscow State Technical University (2-ya Baumanskaya ul. 5, str. 1, Moscow, 105005 Russian Federation).

Please cite this article in English as:

Belkin A.E., Dashtiev I.Z., Nikitin E.A. Analysis of nonlinear cyclically symmetric isolation system of a cargo in a container under plane harmonic vibrations. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Mechanical Engineering*, 2021, no. 4 (139), pp. 32–50 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18698/0236-3941-2021-4-32-50>

В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана
вышел в свет учебник авторов
**А.А. Александрова, В.И. Ларионова,
С.П. Суцева**

**«Анализ и управление техногенными
и природными рисками»**



Изложены теоретические основы анализа и управления техногенными и природными рисками. Показан единый научно-методический подход к решению задач анализа риска возникновения чрезвычайных ситуаций. Рассмотрены основные характеристики природных и техногенных опасностей, причины отказов технических систем. Приведены методы исследования надежности технических систем и типовые примеры расчетов, методы оценки и анализа рисков в техногенной и природной сферах с применением ГИС-технологий, расчетно-аналитический и статистический подходы к зонированию по риску объектов и территорий. Рассмотрены экономические аспекты управления безопасностью.

По вопросам приобретения обращайтесь:
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1
+7 (499) 263-60-45
press@bmstu.ru
<https://bmstu.press>