УДК 539.374

К. И. Романов

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА В ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Рассмотрены интегральные кривые теории ползучести. К изучению ползучести применены теория вероятностей и эргодическая теорема.

E-mail: romanovki@mail.ru

Ключевые слова: *теорема, процесс, предел, ползучесть, неопределенность.*

Интегральные кривые теории ползучести можно интерпретировать как случайные функции с соответствующими свойствами. Причина привлечения теории вероятностей к изучению ползучести заключается в неопределенности свойств материала из-за дисперсии экспериментальных данных. Связать детерминированную и стохастическую постановки задачи можно, используя эргодическую теорему, которая позволяет дать оценку статистической устойчивости решений краевых задач.

Эргодическая теорема допускает стационарность случайного процесса в формулировке [1]: если непрерывный процесс $\xi(t)$ (t — время) имеет конечное математическое ожидание, то с вероятностью, равной единице, существует предел (T — время)

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \xi(t)dt. \tag{1}$$

В частности, теорема может применяться для уравнения состояния [2]

$$\dot{\varepsilon}=\frac{\dot{\sigma}}{E}+B\sigma^n,$$

где ε — деформация; σ — напряжение; E и n — постоянные; $B=B(t)$ — функция; точка обозначает производную по времени.

При $\dot{\varepsilon}=0$ в случае $n>1$ получаем

$$\sigma=\sigma(0)\left[1+(n-1)\,E\Omega\sigma(0)^{n-1}\right]^{-\frac{1}{n-1}}, \tag{2}$$

где $\sigma(0)=\sigma$ при $t=0$, а

$$\Omega=\int B\,dt.$$

Для такого материала при определенной температуре может быть введено безразмерное время

$$\omega=(n-1)\,E\sigma(0)^{n-1}\Omega.$$

Тогда
$$\sigma = \sigma(0)\Delta, \quad \Delta = (1+\omega)^{-\frac{1}{n-1}}.$$

Площадь под кривой релаксации можно записать как
$$F_* = \int\limits_0^{\omega} \sigma(0)\,(1+\omega)^{-\frac{1}{n-1}}\,d\omega = \sigma(0)\frac{n-1}{n-2}\left[(1+\omega)^{\frac{n-2}{n-1}} - 1\right].$$

Отметим, что $F_* \to \infty$ при $n > 2$. Предел вычисляем следующим образом:
$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega}\sigma(t)dt = \lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{1}{\omega}\sigma(0)\frac{n-1}{n-2}\,(1+\omega)^{\frac{n-2}{n-1}} - \frac{1}{\omega}\sigma(0)\frac{n-1}{n-2}\right] =$$
$$= \sigma(0)\frac{n-1}{n-2}\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{\omega}\,(1+\omega)^{\frac{n-2}{n-1}},$$
при $n < 2$
$$\sigma(0)\frac{n-1}{n-2}\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{\omega}\frac{1}{(1+\omega)^{\frac{2-n}{n-1}}} = 0.$$

Таким образом, эргодическая теорема доказывается в ограниченном интервале изменения показателя ползучести: $1 < n < 2$.

В случае если $n < 1$, решение уравнения ползучести меняется, а именно:
$$\sigma = \sigma(0)\left[1 - \frac{E\,(1-n)\,\Omega}{\sigma(0)^{1-n}}\right]^{\frac{1}{1-n}} \qquad (3)$$
или
$$\sigma = \sigma(0)\Delta, \quad \Delta = (1-\omega)^{\frac{1}{1-n}}.$$

Релаксация у такого материала осуществляется за конечное время:
$$\frac{E\,(1-n)\,\Omega_*}{\sigma(0)^{1-n}} = 1,$$
т.е. $\omega_* = 1$.

Площадь под такой кривой релаксации определяют из выражения
$$F_* = \int\limits_0^{\omega}\sigma(0)\Delta d\omega = \sigma(0)\frac{1-n}{2-n}\left[1 - (1-\omega)^{\frac{2-n}{1-n}}\right].$$

В эргодической теореме $T = \omega_* = 1$ и конечный предел (1) можно заменить на среднее:
$$\int\limits_0^{1}\Delta d\omega = \frac{F_*}{\sigma(0)} = \frac{1-n}{2-n}.$$

Следовательно, процесс (3) характеризуется как стационарный за конечное время при любом $n < 1$.

Бесконечный процесс релаксации (если $n > 1$) имеет математическое ожидание

$$M\Delta = \int\limits_0^{\omega} \omega\Delta d\omega = \int\limits_0^{\omega} \omega\,(1+\omega)^{-\frac{1}{n-1}}\,d\omega =$$

$$= (n-1)\left[\frac{1}{2n-3}(1+\omega)^{\frac{2n-3}{n-1}} - \frac{1}{n-2}\,(1+\omega)^{\frac{n-2}{n-1}} + \frac{n-1}{(2n-3)\,(n-2)}\right].$$

В свою очередь, математическое ожидание приводит к дроблению показателя ползучести. Конечное значение $M\Delta = \dfrac{(n-1)^2}{(2n-3)\,(n-2)}$ существует при ограничении $1 < n < 3/2$, следовательно, в достаточно узком диапазоне.

Дисперсию для оператора (2) можно записать следующим образом:

$$D\Delta = \int\limits_0^{\omega} \left[\omega - \frac{(n-1)^2}{(2n-3)\,(n-2)}\right]^2 \Delta d\omega =$$

$$= J_* - \frac{2\,(n-1)^2}{(2n-3)\,(n-2)} S_* + \frac{(n-1)^4}{(2n-3)^2\,(n-2)^2}\frac{F_*}{\sigma(0)},$$

$$J_* = \int \omega^2\,(1+\omega)^{-\frac{1}{n-1}}\,d\omega;\ \ S_* = \int \omega\,(1+\omega)^{-\frac{1}{n-1}}\,d\omega;\ \ F_*/\sigma(0) = \int \Delta d\omega,$$

где J_* — момент инерции площади под кривой относительно оси ординат; S_* — статический момент; $F_*/\sigma(0)$ — определенная ранее площадь под кривой.

Таким образом, определение моментов различных порядков приводит к новым геометрическим характеристикам интегральных кривых теории ползучести.

Если $1 < n < 3/2 \quad (\omega \to \infty)$, то

$$F_*/\sigma(0) = \frac{n-1}{2-n};$$

$$S_* = M\Delta = \frac{(n-1)^2}{(2n-3)\,(n-2)},$$

а также при любом значении ω имеем

$$J_* = -2\,(n-1)^2\,\frac{1}{(3n-4)\,(2n-3)}.$$

Приведенная формула для J_* позволяет сделать вывод о наличии особых точек в области определения решения $(n > 1)$. Дисперсия

Δ-оператора существует при $n < 4/3$; математическое ожидание при $n < 3/2$; площадь под кривой релаксации существует при $n < 2$, а эргодическая теорема — в интервале $(1, 2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 320 с.
2. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 399 с.

Статья поступила в редакцию 30.10.2009

Константин Игоревич Романов родился в 1952 г., окончил в 1975 г. МВТУ им. Н.Э. Баумана. Д-р техн. наук, профессор кафедры “Прикладная механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 120 научных работ в области механики деформируемого твердого тела.

K.I .Romanov (b. 1952) graduated from Bauman Moscow Higher Technical School in 1975. D. Sc. (Eng.), professor of “Applied Mechanics” Department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 120 publications in the field of mechanics of deformable solid body.