УДК 621.9.01: 517.91

А. М. Гуськов, В. В. Захаров

ДИНАМИКА ВИБРАЦИОННОГО СВЕРЛЕНИЯ УСТРОЙСТВОМ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ВИБРОВОЗБУДИТЕЛЕМ

Рассмотрена динамика устройства с электромагнитным вибровозбудителем для вибрационного сверления. Разработана нелинейная математическая модель, состоящая из трех групп уравнений: нелинейных дифференциальных уравнений электромеханических колебаний; двухпараметрического закона резания; нелинейных алгебраических уравнений образования новых поверхностей в процессе резания, включающих в себя запаздывание. Для случая отсутствия резания методом многомасштабных разложений получено приближенное аналитическое решение. Рассмотрена динамика устройства в процессе резания. Найдены области регулярного прерывистого резания.

Различные модели для исследования колебаний при обработке резанием приведены в обзорной статье [1]. В работе [2] рассмотрены эффекты самовозбуждения и взаимного влияния двух резцов при токарной обработке цилиндрических поверхностей. В работе [3] исследована динамика точения длинных цилиндрических деталей многорезцовой двухрядной головкой. Рассмотрены вибрационные автоколебательные режимы, при которых одни резцы имеют прерывистое резание, а другие — непрерывное. В работе [4] рассмотрена динамика электромеханической системы на примере балки, на которую действует электромагнитный вибровозбудитель. В работе [5] для исследования динамики нелинейной системы использован метод многомасштабных разложений.

В настоящей работе рассматривается расчетная схема устройства с электромагнитным вибровозбудителем для вибрационного сверления (рис. 1). Для возбуждения колебаний в системе используется двухзазорный электромагнитный вибровозбудитель переменного тока, состоящий из двух электромагнитов с П-образными сердечниками *1* и двух жестко связанных между собой якорей *2* из ферромагнитного материала. Якоря крепятся на балках *3* постоянного сечения, которые связаны с дополнительной массой *4*. Связь инструмента *5* с дополнительной массой моделируется в виде пружины с линейной жесткостью и демпфера.

Принцип работы устройства заключается в следующем. На обмотки электромагнита подается синусоидальное напряжение. В зазорах

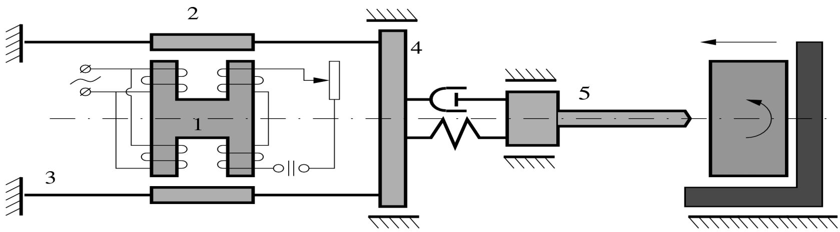

Рис. 1. Расчетная схема устройства для вибрационного сверления

между электромагнитами и якорями возникает переменное магнитное поле, взаимодействующее с материалом якорей. Действующие переменные силы возбуждают колебания якорей и связанных с ними балок. Изгибные колебания балок приводят к переменным во времени продольным перемещениям дополнительной массы, которые, в свою очередь, через пружину и демпфер передаются инструменту.

Математическая модель. Математическая модель электродинамического вибратора и инструмента при сверлении состоит из:

• системы нелинейных дифференциальных уравнений электромеханических колебаний;

• двухпараметрического закона резания;

• системы нелинейных алгебраических уравнений образования новых поверхностей в процессе резания. Уравнения содержат неизвестные функции с запаздывающим аргументом.

Уравнения электромеханических колебаний. Рассматриваемая система является электромеханической. Динамика электромеханических систем описывается уравнениями Лагранжа–Максвелла [6, 7]. Для систем, в которых токи замкнуты, эти уравнения можно записать в виде

$$\begin{cases} \dot{\Phi}_r + \sum\limits_{s=1}^{m} R_{rs} \dfrac{\partial W}{\partial \Phi_s} = E_r, & r = 1, \ldots, m; \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \dfrac{\partial T}{\partial q_k} + \dfrac{\partial \Pi}{\partial q_k} = Q_k + \dfrac{\partial W}{\partial q_k}, & k = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Здесь Φ_r — магнитные потоки; R_{rs} — активные сопротивления в контуре; W — энергия магнитного поля системы; E_r — сумма сторонних ЭДС в контуре r; m — число замкнутых неразветвленных контуров; q_k — обобщенная координата системы; Π, T — потенциальная и кинетическая энергии системы; Q_k — непотенциальные силы; n — число степеней свободы системы. Первая группа уравнений описывает динамику электромагнитной составляющей системы, а вторая — механической.

На рис. 2 приведена расчетная схема вибровозбудителя. Предположим, что магнитное сопротивление общей части двух П-образных сердечников мало́ по сравнению с суммой магнитных сопротивлений

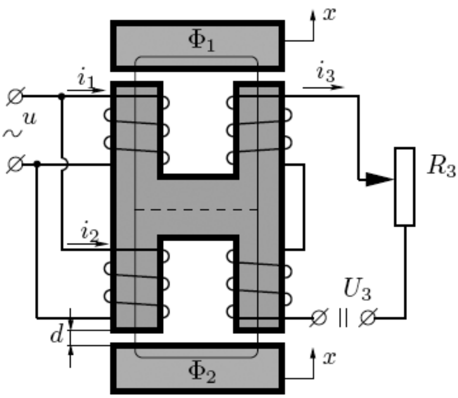

Рис. 2. Расчетная схема вибровозбудителя

воздушных промежутков и остальных участков сердечников. Это позволяет считать, что силовые линии замыкаются так, как показано на рис. 2, и не учитывать часть потока (штриховая прямая, см. рис. 2).

Предположим, что электромагниты одинаковые, размеры сечения сердечника велики по сравнению с расстоянием между якорем и сердечником, но малы по сравнению с длиной силовых линий. Это позволяет считать скалярный потенциал постоянным по сечению, а поле в промежутках между якорем и сердечником — однородным; поле же в ферромагнетике можно учесть, введя магнитное сопротивление $R_м$ сердечника и якоря.

Энергия магнитного поля в системе определяется по формуле [12]

$$W = \frac{1}{2}\left[R_м(\Phi_1^2+\Phi_2^2) + \frac{2\,(d+x)}{\mu_0\,S}\Phi_1^2 + \frac{2(d-x)}{\mu_0\,S}\Phi_2^2\right], \qquad (1)$$

где Φ — магнитный поток в ферромагнетике; S — площадь зазора; μ_0 — магнитная проницаемость воздуха; d — зазор между якорями и сердечниками в невозбужденной системе; x — перемещение верхнего якоря, направленное в сторону увеличения зазора. Выражение (1) составлено в предположении, что магнитный поток через любое сечение магнитопровода и промежутки между сердечниками и якорями один и тот же. Величины $R_м$ считаются постоянными, т.е. не учитывается гистерезис и насыщение ферромагнетика.

Обобщенными импульсами в системе являются не потоки Φ_1 и Φ_2, а потокосцепления $n\Phi_1$ и $n\Phi_2$, где n — число витков в обмотках электромагнитов. Поэтому первая группа уравнений Лагранжа–Максвелла для рассматриваемой системы будет иметь вид

$$n\dot{\Phi}_k + R\,i_k = u(t), \quad k = 1, 2, \qquad (2)$$

где R — активное сопротивление обмотки электромагнита; i_k — ток в обмотке; $u(t) = U_0\sin(2\pi\,\Omega\,t)$ — напряжение, подаваемое на обмотку; Ω — частота сети, Гц.

Связь между потоками и токами можно представить в виде [7]

$$\begin{cases} n\,i_1 + n_3\,i_3 = \left[R_м + \dfrac{2\,d}{\mu_0\,S}\left(1+\dfrac{x}{d}\right)\right]\Phi_1; \\ n\,i_2 - n_3\,i_3 = \left[R_м + \dfrac{2\,d}{\mu_0\,S}\left(1-\dfrac{x}{d}\right)\right]\Phi_2, \end{cases} \qquad (3)$$

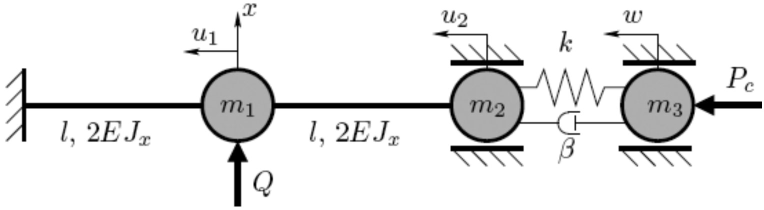

Рис. 3. Расчетная схема механической составляющей системы

где n_3 — число витков обмоток в цепи подмагничивания; i_3 — ток в цепи подмагничивания. Соотношения (3) — это закон Ома для магнитных цепей электромагнитов, причем параметры в левых частях равны значениям магнитодвижущих сил.

После подстановки соотношений (3) в уравнения (2) получаем

$$\begin{cases} \dot{\Phi}_1 + \left[\dfrac{R\,R_{\text{м}}}{n^2} + 2\dfrac{R\,d}{n^2\mu_0\,S}\left(1+\dfrac{x}{d}\right)\right]\Phi_1 - R\dfrac{n_3}{n^2}i_3 = \dfrac{U_0}{n}\sin(2\pi\,\Omega\,t); \\ \dot{\Phi}_2 + \left[\dfrac{R\,R_{\text{м}}}{n^2} + 2\dfrac{R\,d}{n^2\mu_0\,S}\left(1-\dfrac{x}{d}\right)\right]\Phi_2 + R\dfrac{n_3}{n^2}i_3 = \dfrac{U_0}{n}\sin(2\pi\,\Omega\,t). \end{cases} \tag{4}$$

Ток i_3 в цепи подмагничивания определяется независимо от динамики системы, поэтому в дальнейшем считается известным.

Используя условие жесткого соединения якорей, расчетную схему механической составляющей системы можно привести к виду, показанному на рис. 3. Полученная система имеет две степени свободы: поперечные x и продольное w перемещения якорей и инструмента. Остальные обозначения на рис. 3 имеют следующий смысл: m_1, m_2, m_3 — суммарная масса якорей, масса дополнительного элемента и инструмента соответственно; l, EJ_x — длина и жесткость балки; Q — пондеромоторная сила; P_c — осевая составляющая силы резания.

Продольные перемещения u_1 якорей и дополнительной массы u_2 выражаются через поперечное перемещение x якоря. Для получения этой связи представим форму изогнутой оси балок в виде уравнения $v(t,s) = x(t)f(s)$, где $s \in [0,1]$ — безразмерная продольная координата сечений балки. Функция $f(s)$ должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$s = 0: \quad v(t,0) = 0, \ \left.\frac{\partial v(t,s)}{\partial s}\right|_{s=0} = 0;$$

$$s = 1: \quad v(t,1) = 1, \ \left.\frac{\partial v(t,s)}{\partial s}\right|_{s=1} = 0.$$

Тогда перемещения $u_1(t)$ и $u_2(t)$ выражаются через поперечное перемещение якоря x следующим образом:

$$u_1(t) = \frac{1}{2l}\int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 ds; \quad u_2(t) = 2u_1(t).$$

Подставляя выражение для $v(t,s)$, получаем

$$u_1 = \frac{x^2}{2\,l} J_1, \quad u_2 \;= \frac{x^2}{l} J_1$$

где $J_1 = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{df}{ds}\right)^2 ds \sim 1.$

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2}\left[m_1\,\dot{x}^2 + m_1\,\dot{u}_1^2 + m_2\,\dot{u}_2^2 + m_3\,\dot{w}^2\right] = \\ = \frac{1}{2}\left[m_1\left(1 + \frac{{J_1}^2}{l^2}\mu_{21}\,x^2\right)\dot{x}^2 + m_3\,\dot{w}^2\right],$$

где $\mu_{21} = 1 + 4\,m_2/m_1$.

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = \frac{k(u_2 - w)^2}{2} + 2\,U_{\text{изг}},$$

где k — жесткость пружины. Потенциальная энергия $U_{\text{изг}}$ упругой деформации балок определяется следующим образом:

$$U_{\text{изг}} = \frac{1}{2}\frac{2\,E\,J_x}{l^3}\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right)^2 ds = \frac{E\,J_x}{l^3} J_2\;x^2,$$

где $J_2 = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{d^2 f}{ds^2}\right)^2 ds$. Окончательно потенциальную энергию системы можно записать как

$$\Pi = \frac{2\,EJ_x\,J_2}{l^3}\,x^2 + \frac{k}{2}\left(\frac{J_1}{l}\,x^2 - w\right)^2.$$

Рассеяние энергии в механической системе учитывается с помощью диссипативной функции Рэлея:

$$\Psi = \frac{\beta_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{\beta_2(\dot{u}_2 - \dot{w})^2}{2} = \frac{\beta_1 \dot{x}^2}{2} + \frac{\beta_2}{2}\left(\frac{2\,J_1\,x\,\dot{x}}{l} - \dot{w}\right)^2,$$

где β_1, β_2 — коэффициенты демпфирования. Обобщенные силы вязкого трения определяются по уравнениям:

$$Q_{x*} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{x}} = -\beta_1 \dot{x} + 2\,\beta_2 \frac{J_1}{l} x\,\dot{w} - 4\,\beta_2 \frac{{J_1}^2}{l^2} x^2\,\dot{x};$$
$$Q_{w*} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{w}} = 2\,\beta_2 \frac{J_1}{l} x\,\dot{x} - \beta_2\,\dot{w}.$$

Пондеромоторная сила [7]

$$Q = -\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{\mu_0\,S}\left({\Phi_2}^2 - {\Phi_1}^2\right).$$

После подстановки полученных выражений во вторую группу уравнений Лагранжа–Максвелла получаем

$$\begin{cases} m_1 \left(1 + \dfrac{{J_1}^2}{l^2}\mu_{21}\, x^2\right)\ddot{x} + \beta_1\dot{x} + \dfrac{4\,E\,J_x\,J_2}{l^3}x + N\,(x, \dot{x}, w, \dot{w}) = \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \dfrac{{\Phi_2}^2 - {\Phi_1}^2}{\mu_0\, S}; \\ m_3\,\ddot{w} + \beta_2\,\dot{w} + k\,w - \dfrac{k\,J_1}{l}x^2 - \dfrac{2\,\beta_2\,J_1}{l}\,x\,\dot{x} = P_c. \end{cases} \tag{5}$$

Нелинейные слагаемые в первом из уравнений (5) имеют вид

$$N\,(x, \dot{x}, w, \dot{w}) = \frac{m_1\mu_{21}\,{J_1}^2}{l^2}\dot{x}^2\,x - \frac{2\,k\,J_1}{l}w\,x - \frac{2\,\beta_2\,J_1}{l}\dot{w}\,x + \\ + \frac{4\,\beta_2\,J_1^2}{l^2}\dot{x}\,x^2 + \frac{2\,k\,J_1^2}{l^2}x^3.$$

Уравнения (4) и (5) описывают динамику рассматриваемой электромеханической системы.

Сила резания. Кинематика резания. Для описания осевой силы резания воспользуемся следующим двухконстантным представлением [8]:

$$P_c = \frac{k_{C0}\,h_0}{q}\bar{\eta}^q,$$

где $k_{C0} = g\,\sigma_L\,R\,q\,[h_0/(n_c\,R)]^{q-1}$ — статическая жесткость резания; g — постоянная формы режущей кромки; σ_L — характерное напряжение обрабатываемого материала; R — радиус сверла; q — параметр нелинейности закона резания, $0 < q \leqslant 1$; h_0 — номинальная подача на оборот; n_c — число режущих кромок; $\bar{\eta}$ — приведенная толщина снимаемого слоя, определяется мгновенными значениями толщины h_j каждой из снимаемых режущих кромок:

$$\bar{\eta} = \left[\frac{1}{n_c}\sum_{j=1}^{n_c}\left(n_c\,\frac{h_j}{h_0}\right)^q\right]^{1/q}.$$

При непрерывном резании без вибраций $\bar{\eta} \equiv 1$; сила резания совпадает с «квазистатическим» законом резания.

Рассмотрим обрабатываемую поверхность как сигнал, поступающий под режущую кромку в момент времени t и сформированный предыдущей режущей кромкой в момент времени $t - T/n_c$, где $T = 1/\omega$ — период вращения детали, с; ω — частота вращения детали, Гц. Под j-й режущей кромкой в момент времени t величина этого сигнала равна расстоянию от поверхности торца до поверхности дна под кромкой с номером $J = (j - 2\mathrm{mod}n_c) + 1$ в момент времени $t - T/n_c$. Тогда кинематика процесса резания будет описываться следующей совокупностью уравнений [8]:

$$\begin{cases} D_j(t) = -w(t) - H + v\,t - L_J(t - T/n_c); \\ h_j(t) = \max\left[0,\ D_j(t)\right]; \\ L_j(t) = L_J(t - T/n_c) + h_j(t); \\ L_j(t) = L_{0j}(t), \quad t \leqslant 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Здесь $D_j(t)$ — расстояние между j-й режущей кромкой и дном отверстия; H — расстояние от инструмента до средней поверхности торца детали в начальный момент времени; v — постоянная скорость осевой подачи; $L_J(t - T/n_c)$ — отклонение поверхности торца от плоскости под j-й кромкой; $L_j(t)$ — характеристика обработанной поверхности (глубина отверстия вдоль образующей напротив j-й режущей кромки в текущий момент времени); $L_{0j}(t)$ — начальная характеристика поверхности торца детали. В случае плоского торца, перпендикулярного осевому движению детали, следует предположить $L_{0j}(t) = 0$ при $t \leqslant 0$. В этом случае все режущие кромки имеют одинаковые геометрические характеристики.

Второе уравнение системы (6) определяет толщину снимаемого слоя. Все уравнения системы (6) описывают процесс образования новых поверхностей в ходе резания, учитывают возможность выхода режущих кромок инструмента из обрабатываемого материала, являются нелинейными и содержат функции с запаздывающим аргументом.

Нормирование уравнений. Для удобства дальнейших вычислений полученные уравнения приводятся к безразмерному виду. В качестве масштаба времени берется время T одного оборота детали, масштаба длины — номинальная подача на оборот $h_0 = v\,T$, а для масштаба магнитных потоков вводится обозначение Φ_*:

$$\tau = \frac{t}{T}; \quad \{\phi_1,\, \phi_2\} = \frac{1}{\Phi_*}\{\Phi_1,\, \Phi_2\}; \quad \{\xi,\, \zeta,\, \delta\} = \frac{1}{h_0}\,\{x,\, w,\, d\}.$$

Уравнения динамики системы (4) и (5) в безразмерном виде принимают вид:

$$\begin{cases} \phi_1' + \mu\,\left\{\left[\rho_{\text{м}} + \rho\left(1 + \dfrac{\xi}{\delta}\right)\right]\phi_1 - i_*\right\} = u\sin(2\pi\,\nu\tau); \\ \phi_2' + \mu\,\left\{\left[\rho_{\text{м}} + \rho\left(1 - \dfrac{\xi}{\delta}\right)\right]\phi_2 + i_*\right\} = u\sin(2\pi\,\nu\tau); \\ (1 + \varepsilon^2\,\mu_{21}\xi^2)\,\xi'' + 4\,\pi\,\alpha_1 p_1\xi' + 4\,\pi^2\,{p_1}^2\,\xi + \tilde{N}_1\,(\xi, \xi', \zeta, \zeta') = \\ \quad = \phi_2^2 - \phi_1^2; \\ \zeta'' + 4\,\pi\,\alpha_2\,p_2\,\zeta' + 4\,\pi^2\,{p_2}^2\,\zeta + \tilde{N}_2\,(\xi, \xi', \zeta, \zeta') = 4\,\pi^2 p_2^2\,\dfrac{\varkappa\,\bar{\eta}^q}{q}. \end{cases} \qquad (7)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по новому времени τ и введены следующие безразмерные параметры электромагнитной составляющей системы:

$$\mu\,\rho_{\text{м}} = \frac{R\,R_{\text{м}}T}{n^2}, \qquad \mu\,\rho = \frac{R}{n^2}\,\frac{2\,d\,T}{\mu_0\,S}, \qquad \mu\,i_* = \frac{R}{n^2}\,\frac{n_3\,i_3 T}{\Phi_*},$$
$$u = \frac{U_0 T}{n\,\Phi_*}, \qquad \nu = \Omega\,T.$$

Параметр μ характеризует отношение активного сопротивления электромагнита к индуктивному, обычно $\mu \ll 1$ [7].

Безразмерные параметры механической составляющей системы можно представить как:

$$\varepsilon = J_1\frac{h_0}{l}, \qquad p_1 = \frac{T}{2\,\pi}\sqrt{\frac{4\,J_2\,EJ_x}{m_1\,l^3}}, \qquad p_2 = \frac{T}{2\,\pi}\sqrt{\frac{k}{m_3}},$$
$$\alpha_1 = \frac{\beta_1}{2\sqrt{m_1\dfrac{4\,J_2\,EJ_x}{l^3}}}, \qquad \alpha_2 = \frac{\beta_2}{2\sqrt{k\,m_3}}, \qquad \varkappa = \frac{k_{C0}}{k\,h_0}.$$

Смысл параметров p_1 и p_2 — число свободных колебаний соответственно якоря и инструмента за один оборот детали.

Нелинейные слагаемые в последних двух уравнениях системы (7) имеют вид

$$\tilde{N}_1\,(\xi, \xi', \zeta, \zeta') = -\,\varepsilon\left(8\,\pi^2\,\mu_{31}\,{p_2}^2\,\zeta\,\xi + 8\,\pi\,\mu_{31}\,\alpha_2\,p_2\,\zeta'\,\xi\right) +$$
$$+\,\varepsilon^2\left(\mu_{21}\,\xi\,{\xi'}^2 + 16\,\pi\,\mu_{31}\,\alpha_2\,p_2\,\xi^2\,\xi' + 8\,\pi^2\,\mu_{31}\,{p_2}^2\,\xi^3\right),$$
$$\tilde{N}_2\,(\xi, \xi', \zeta, \zeta') = -\varepsilon\left(4\,\pi^2{p_2}^2\xi^2 + 8\,\pi\,\alpha_2\,p_2\,\xi\,\xi'\right).$$

Здесь $\mu_{31} = m_3/m_1$. Также добавлено уравнение для определения масштаба магнитных потоков:

$$\frac{T^2\,\Phi_*^2}{m_1 h_0 \mu_0 S} = 1.$$

Запишем безразмерные характеристики обрабатываемой поверхности как:

$$\{\Delta_j,\,\Lambda_j,\,\eta_j,\,H\} = \frac{1}{h_0}\{D_j,\,L_j,\,h_j,\,H\}.$$

Соответственно, уравнения образования новых поверхностей в процессе резания можно представить в безразмерном виде:

$$\begin{cases} \Delta_j(\tau) = -\zeta(\tau) - H + \tau - \Lambda_J(\tau - 1/n_c); \\ \eta_j(\tau) = \max\left[0,\,\Delta_j(\tau)\right]; \\ \Lambda_j(\tau) = \Lambda_J(\tau - 1/n_c) + \eta_j(\tau); \\ \Lambda_j(\tau) = \Lambda_{j0}(\tau), \quad \tau \leqslant 0; \quad J = (j - 2\mathrm{mod}n_c) + 1. \end{cases} \tag{8}$$

Полученные уравнения электромеханических колебаний (7) и образования новой поверхности в процессе резания (8) являются нелинейными. Источниками нелинейности в системе служат:

• пондеромоторные силы;

• связь продольных перемещений якорей и дополнительной массы с поперечными перемещениями якорей;

• зависимость толщины срезаемого слоя от перемещений инструмента (прерывистость резания);

• нелинейность закона резания.

Аналитическое решение. Система дифференциальных уравнений (7) естественно содержит малый параметр $\varepsilon = J_1 \; h_0/l \sim \sim (1\dots10)10^{-4}$. Поэтому в случае, когда сила резания равна нулю, можно получить приближенное аналитическое решение одним из асимптотических методов. Воспользуемся *методом многомасштабных разложений*. Этот метод позволяет получить равномерно пригодное решение, которое можно использовать для любых моментов времени $\tau > 0$.

Введем новые временны́е переменные [9]:

$$t_0 = \tau, \quad t_1 = \varepsilon\,\tau, \quad t_2 = \varepsilon^2\tau, \quad \dots, \quad t_j = \varepsilon^j\,\tau,$$

где t_0 — основное, "быстрое" время; t_j при $j > 0$ — "медленное" время. Величины t_j представляют собой различные масштабы времени. Производные по времени τ преобразуются следующим образом:

$$\frac{d}{d\,\tau} = \partial_0 + \varepsilon\,\partial_1 + \varepsilon^2\partial_2 + \dots\,;$$
$$\frac{d^2}{d\,\tau^2} = {\partial_0}^2 + 2\,\varepsilon\,\partial_0\,\partial_1 + \varepsilon^2\left({\partial_1}^2 + 2\,\partial_0\,\partial_2\right) + \dots\,,$$

где $\partial_j = \partial/\partial\,t_j$. Решения уравнений (7) будем искать в виде рядов по ε:

$$g = g(t_0,\,t_1,\,\dots,\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j\,g_j,$$

где $g = \{\phi_1,\,\phi_2,\,\xi,\,\zeta\}$. Подставляя ряды в уравнения (7) и собирая слагаемые при соответствующих степенях ε, получаем систему рекурентных уравнений для определения составляющих искомых функций[1]. Система для определения функций с индексом "0" называется *порождающей* и в рассматриваемом случае имеет вид

$$\begin{cases} \partial_0\,\phi_{10} = u\sin(2\pi\,\nu\,t_0); \\ \partial_0\,\phi_{20} = u\sin(2\pi\,\nu\,t_0); \\ {\partial_0}^2\,\xi_0 + 4\,\pi\,\alpha_1\,p_1\,\xi_0' + 4\,\pi^2\,{p_1}^2\,\xi_0 = {\phi_{20}}^2 - {\phi_{10}}^2; \\ {\partial_0}^2\,\zeta_0 + 4\,\pi\,\alpha_2\,p_2\,\zeta_0' + 4\,\pi^2\,{p_2}^2\,\zeta_0 = 0. \end{cases}$$

[1]Для дальнейших выкладок заменим $\mu = \varepsilon\,\sigma$, где $\sigma > 0$.

Решение этой системы (для перемещений используем только частные решения дифференциальных уравнений) можно представить следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\phi_{10} = A_1 - \frac{u}{2\pi\nu}\cos(2\pi\nu t_0);\\
&\phi_{20} = A_2 - \frac{u}{2\pi\nu}\cos(2\pi\nu t_0);\\
&\xi_0 = -k_0\delta({A_1}^2 - {A_2}^2) + \frac{uk_1\delta}{\pi\nu}(A_1 - A_2)\cos(2\pi\nu t_0 + \psi_1);\\
&\zeta_0 = 0,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&k_0 = \frac{1}{4\pi^2{p_1}^2\delta};\\
&k_1 = \frac{1}{4\pi^2{p_1}^2\delta}\left\{\sqrt{\left(\left(\frac{\nu}{p_1}\right)^2 - 1\right)^2 + 4{\alpha_1}^2\left(\frac{\nu}{p_1}\right)^2}\right\}^{-1};\\
&\psi_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\alpha_1\nu p_1}{\nu^2 - {p_1}^2}\right).
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

Величины A_1, A_2 являются неизвестными функциями медленных масштабов времени. Для их определения используем уравнения для потоков, образованные коэффициентами при ε в первой степени,

$$
\begin{cases}
\partial_0\phi_{11} = -\partial_1\phi_{10} - \sigma\left\{\left[\rho_{\text{м}} + \rho\left(1 + \dfrac{\xi_0}{\delta}\right)\right]\phi_{10} - i_*\right\};\\
\partial_0\phi_{21} = -\partial_1\phi_{20} - \sigma\left\{\left[\rho_{\text{м}} + \rho\left(1 - \dfrac{\xi_0}{\delta}\right)\right]\phi_{20} + i_*\right\}.
\end{cases}
\qquad (10)
$$

Для обеспечения равномерной пригодности решений необходимо и достаточно, чтобы правые части уравнений (10) не содержали секулярных слагаемых, т.е. слагаемых, которые приведут к появлению частных решений, неограниченно возрастающих с увеличением времени. Секулярных слагаемых не будет, если в разложения правых частей уравнений (10) в ряд Фурье не войдут постоянные составляющие:

$$
\nu\int_0^{1/\nu} H_1\,dt_0 = 0; \quad \nu\int_0^{1/\nu} H_2\,dt_0 = 0. \qquad (11)
$$

Здесь H_1, H_2 — обозначения для правых частей уравнений (10). Подставляя в условия (11) выражения для H_j и учитывая, что

$$
\partial_1\phi_{10} = \partial_1 A_1, \qquad \partial_1\phi_{20} = \partial_1 A_2,
$$

получаем систему уравнений для определения неизвестных функций A_j. Эти уравнения называются *уравнениями установления* и имеют вид

$$\begin{cases} \partial_1 A_1 = P_1(A_1,\, A_2) = \sigma \left\{ A_1 \left[a - b\,(A_1^2 - A_2^2) \right] - c\,(A_1 - A_2) - e \right\}; \\ \partial_1 A_2 = P_2(A_1,\, A_2) = \sigma \left\{ A_2 \left[a + b\,(A_1^2 - A_2^2) \right] + c\,(A_1 - A_2) + e \right\}. \end{cases} \tag{12}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$e = \nu \int_0^{1/\nu} i_*\, dt_0, \qquad a = \rho_{\text{м}} + \rho,$$

$$b = k_0 \rho, \qquad c = \frac{u^2 \rho}{4\pi^2 \nu^2} k_1 \cos\psi_1.$$

Параметр e — это среднее за период возбуждения значение тока в цепи подмагничивания.

Стационарные движения в системе определяем, положив $\partial_1 A_1 = \partial_1 A_2 = 0$:

$$\begin{cases} A_1 \left[a - b\,(A_1^2 - A_2^2) \right] - c\,(A_1 - A_2) - e = 0; \\ A_2 \left[a + b\,(A_1^2 - A_2^2) \right] + c\,(A_1 - A_2) + e = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Система нелинейных алгебраических уравнений (13) допускает решение вида $A_2 = -A_1$, называемое симметричным [7]. Это решение будет

$$A_1 = \frac{e}{a - 2c}.$$

Сложив уравнения (13) и затем сократив на $A_1 + A_2$, что для несимметричных решений допустимо, получаем

$$a - b\,(A_1 - A_2)^2 = 0. \tag{14}$$

С помощью уравнения (14) можно найти несимметричные решения в явном виде:

$$A_1 = \frac{1}{2}\left[-\sqrt{\frac{a}{b}} \pm \sqrt{\frac{a - 2c}{b} + 2\frac{e}{\sqrt{a\,b}}} \right];$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{a}{b}} \pm \sqrt{\frac{a - 2c}{b} + 2\frac{e}{\sqrt{a\,b}}} \right];$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{a}{b}} \pm \sqrt{\frac{a - 2c}{b} - 2\frac{e}{\sqrt{a\,b}}} \right];$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\left[-\sqrt{\frac{a}{b}} \pm \sqrt{\frac{a - 2c}{b} - 2\frac{e}{\sqrt{a\,b}}} \right].$$

Устойчивость решения можно определить по собственным числам матрицы Якоби системы (12)

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P_1}{\partial A_1} & \dfrac{\partial P_1}{\partial A_2} \\ \dfrac{\partial P_2}{\partial A_1} & \dfrac{\partial P_2}{\partial A_2} \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} a - c - b(3A_1^2 - A_2^2) & c + 2\,b\,A_1\,A_2 \\ c + 2\,b\,A_1\,A_2 & a - c + b(A_1^2 - 3A_2^2) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Решение будет устойчиво, если корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + s_1\,\lambda + s_2 = 0 \tag{16}$$

матрицы (15) будут иметь отрицательные действительные части. Здесь коэффициенты $s_1,\ s_2$ имеют вид

$$s_1 = 2\,\sigma(b\,(A_1^2 + A_2^2) + c - a),$$

$$s_2 = \sigma^2 \Big(a^2 - b\,(A_1 - A_2)^2\,\left(-2\,c + 3\,b\,(A_1 + A_2)^2\right) -$$

$$-2\,a\,\left(c + b\,\left({A_1}^2 + {A_2}^2\right)\right)\Big).$$

Чтобы действительные части корней характеристического уравнения (16) были отрицательными, необходимо и достаточно, чтобы были положительными его коэффициенты:

$$s_1 > 0, \quad s_2 > 0.$$

Для несимметричных решений, используя уравнение (14), из условия для s_2 получаем невыполняемое неравенство

$$b^2\,\sigma^2\left({A_1}^2 - {A_2}^2\right)^2 < 0.$$

Отсюда делаем вывод, что несимметричные решения неустойчивы.

Для симметричного решения условия устойчивости решения имеют вид

$$(a - 2\,c)^2\,\,(c - a) + 2\,b\,e^2 > 0;$$

$$a\,(a - 2\,c)^2 - \frac{4\,b\,e^2}{a - 2c} > 0.$$

В симметричном режиме первые гармоники сил, действующих на якорь со стороны обоих электромагнитов, складываются, остальные — уничтожаются, поэтому

$$\xi_0 = \left|\frac{u\,k_1\delta}{\pi\,\nu}\,\frac{2e}{a - 2c}\right|\cos(2\pi\,\nu t_0 + \psi_\xi),$$

т.е. колебания гармонические. Возвращаясь к исходным безразмерным параметрам, получаем

$$\xi_0 = |A_\xi|\cos(2\pi\,\nu t_0 + \psi_\xi),$$

где

$$A_\xi =$$
$$= \frac{e\,u}{2\,\pi^2 \rho\, p_1{}^3 \nu \left[\left(\frac{\rho_{\text{м}}}{\rho} + 1 \right) \sqrt{\left(\left(\frac{\nu}{p_1} \right)^2 - 1 \right)^2 + 4\alpha_1{}^2 \left(\frac{\nu}{p_1} \right)^2} - \frac{u^2 \cos\psi_1}{8\,\pi^4 \nu^2 p_1{}^2 \delta} \right]};$$

$$\psi_\xi = \psi_1 + \psi_u.$$

Угол ψ_u равен нулю, если знаменатель выражения для амплитуды больше нуля, и равен π — в противном случае.

Как видно, амплитуда колебаний якорей A_ξ линейно зависит от среднего за период возбуждения значения тока в цепи подмагничивания e и нелинейно зависит от амплитуды подаваемого напряжения u. Причем, существуют такие пары значений параметров $\{\nu,\, u\}$, которые обращают в нуль знаменатель выражения для амплитуды перемещений якоря. При этих значениях параметров в системе будут колебания, сопровождающиеся соударениями якорей и сердечников электромагнита, что подтверждается экспериментально [7].

Используя полученное решение для перемещения якоря, получаем дифференциальное уравнение для определения первого приближения перемещений инструмента:

$$\zeta_1'' + 4\,\pi\,\alpha_2\, p_2\, \zeta_1' + 4\,\pi^2\, p_2{}^2\, \zeta_1 =$$
$$= 2\,\pi^2\, p_2{}^2\, A_\xi{}^2 \left[1 + \cos\left(2\,\widehat{T} \right) - 4\alpha_2 \frac{\nu}{p_2} \sin\left(2\,\widehat{T} \right) \right], \quad (17)$$

где $\widehat{T} = 2\,\pi\,\nu\, t_0 + \psi_\xi$. Частное решение уравнения (17) имеет вид

$$\zeta_1 = \frac{A_\xi{}^2}{2} \left[1 + k \cos(4\pi\,\nu t_0 + 2\,\psi_\xi + \psi_\zeta) \right],$$

где

$$k = \sqrt{\frac{1 + 4\alpha_2{}^2 \left(\frac{2\nu}{p_2} \right)^2}{\left[\left(\frac{2\nu}{p_2} \right)^2 - 1 \right]^2 + 4\alpha_2{}^2 \left(\frac{2\nu}{p_2} \right)^2}};$$

$$\psi_\zeta = \operatorname{arctg} \frac{2\alpha_2 \left(\frac{2\nu}{p_2} \right)}{\left(\frac{2\nu}{p_2} \right)^2 (1 - 4\alpha_2{}^2) - 1}.$$

На рис. 4 приведены амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) перемещений якоря и инструмента (сплошные линии) для системы с

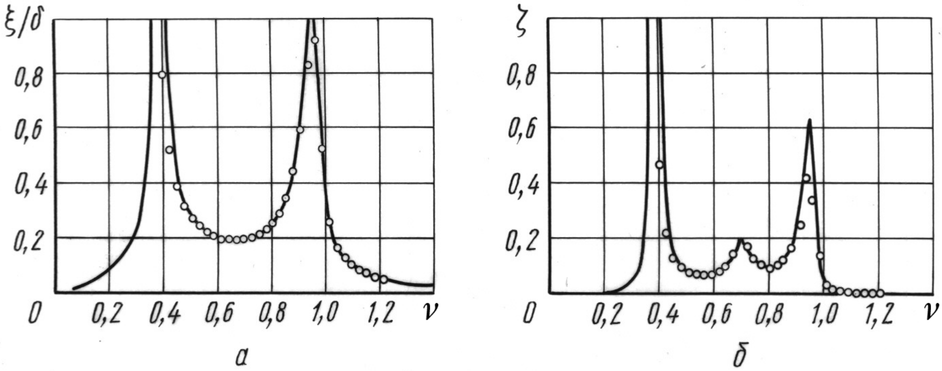

Рис. 4. Амплитудно-частотные характеристики:
а — якоря; *б* — инструмента; сплошные линии — аналитическое решение, точки — результаты численного интегрирования

параметрами[2]:

$$u = 80, \qquad e = 5, \qquad \rho = 2{,}8, \qquad \delta = 50,$$
$$p_1 = 1, \qquad p_2 = 1{,}4, \qquad \alpha_1 = 0{,}05, \qquad \alpha_2 = 0{,}05.$$

Нелинейность системы дифференциальных уравнений не привела к качественному изменению АЧХ по сравнению с АЧХ линейной системы. На АЧХ для перемещения инструмента еще один локальный максимум расположен вблизи значения частоты возбуждения ν, равного половине частоты собственных колебаний инструмента p_2. Для сравнения на том же рисунке приведены значения амплитуд перемещений, полученные в результате численного интегрирования исходных уравнений (7) при $P_c \equiv 0$ (амплитуды определялись как полуразмах установившихся вынужденных колебаний).

По результатам проведенного анализа динамики системы без резания можно сделать следующие выводы:

• уравнения для потоков допускают несколько стационарных решений: симметричное и несимметричные. Несимметричные решения либо не существуют, либо неустойчивы. Для симметричного решения получены условия устойчивости;

• для возбуждения в системе колебаний необходимо, чтобы среднее за период возбуждения значение тока e в цепи подмагничивания было отлично от нуля;

• колебания якорей происходят на частоте возбуждения, а колебания инструмента — на удвоенной частоте возбуждения;

• амплитуда колебаний якорей линейно зависит от среднего значения тока e в цепи подмагничивания и нелинейно — от амплитуды подаваемого напряжения u;

[2]При вычислении угла ψ_1 по формуле (9) необходимо контролировать непрерывность функции arctg.

• амплитуду колебаний якорей и инструмента можно увеличивать (уменьшать) в процессе работы, изменяя амплитуду подаваемого напряжения u и среднее значение тока e в цепи подмагничивания.

Численное моделирование системы в процессе резания. Для исследования динамики рассматриваемой технологической системы наиболее адекватным методом является использование отображения Пуанкаре в виде последовательности экстремумов перемещений якоря и инструмента или толщины слоя, снимаемого одной из режущих кромок (или приведенной толщины снимаемого слоя) — $Extr[\xi]$, $Extr[\zeta]$, $Extr[\eta]$. При этом на диаграмме для каждого значения параметра показываются все экстремумы функции, попавшие в интервал наблюдения.

На рис. 5, *а* показана диаграмма отображения Пуанкаре приведенной толщины снимаемого слоя для системы, в которой отсутствует ток в цепи подмагничивания, т.е. возбуждений колебаний инструмента нет. Изменяемым параметром для построения диаграммы является безразмерная величина p_2 — число свободных колебаний инструмента за один оборот детали. На диаграмме видны зоны значений изменяемого параметра, в которых имеет место прерывистое резание с регулярной стружкой (авторезонансное вибрационное сверление [8]). В этих зонах происходит потеря устойчивости процессом резания с постоянной толщиной снимаемого слоя [8].

На рис. 5, *б* приведена диаграмма Пуанкаре (для системы с тем же набором безразмерных параметров) при вынужденных колебаниях инструмента, возбуждаемых вибропитателем. Безразмерная частота подаваемого напряжения $\nu = \Omega T = 1,1$. В результате дополнительного возбуждения колебаний инструмента в ранее полученных зонах прерывистого резания изменяется поведение системы в процессе резания — стружка становится нерегулярной; а вблизи значения параметра $p_2 = 2,2$, равного удвоенному значению частоты возбуждения,

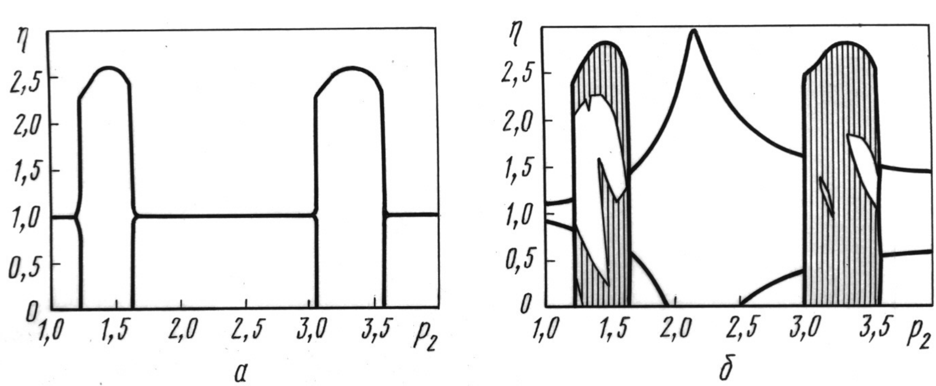

Рис. 5. Отображение Пуанкаре приведенной толщины снимаемого слоя для системы без возбуждения (*а*) и с возбуждением (*б*) вибраций инструмента; изменяемый параметр p_2

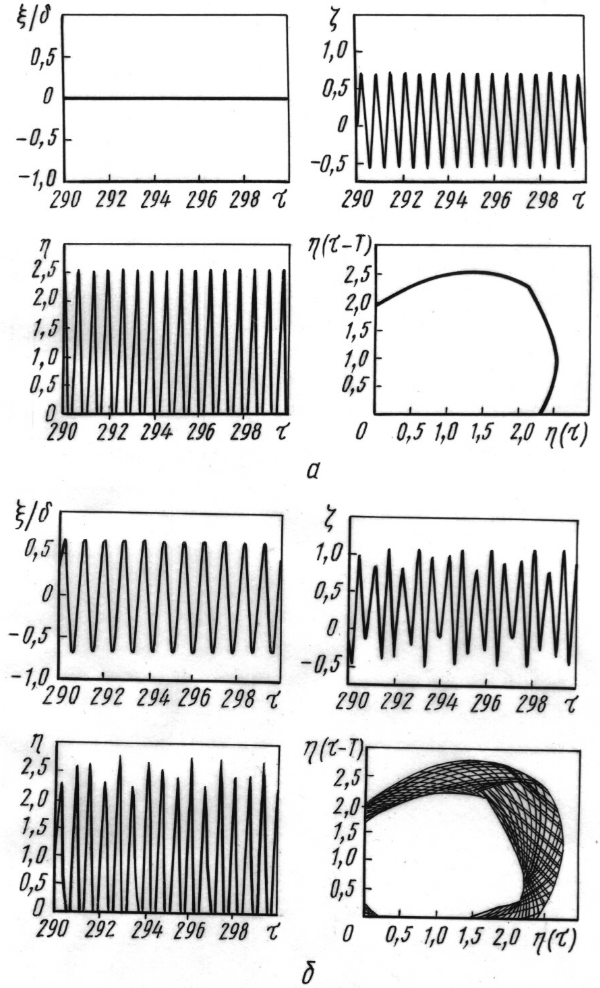

Рис. 6. Численное моделирование системы в процессе резания ($p_2 = 1{,}5$):
а — без возбуждения вибраций инструмента; *б* — с возбуждением вибраций инструмента

на диаграмме появляется еще одна зона с прерывистым резанием и регулярной стружкой — зона синхронизации.

На рис. 6 приведены решения для обеих систем при значении параметра $p_2 = 1,5$. Показаны зависимости перемещений якорей и инструмента и приведенной толщины срезаемого слоя от времени, и построен аналог фазового портрета для толщины срезаемого слоя: по оси абсцисс откладывается текущее значение $\eta(\tau)$, а по оси ординат — значение в некоторый предыдущий момент времени $\eta(\tau - T')$. В данном случае, для T' взято время запаздывания $T' = 1/n_c$. По такому портрету можно судить о стационарности и регулярности значения толщины снимаемого слоя в процессе резания.

На рис. 7 приведены зоны регулярного прерывистого резания на плоскости двух параметров системы: p_2 — число свободных колебаний

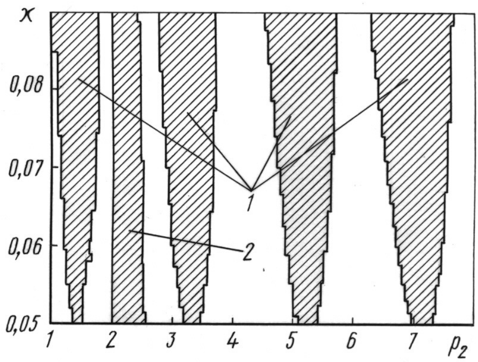

Рис. 7. Зоны регулярного прерывистого резания на плоскости параметров $\{p_2, \varkappa\}$

инструмента за один оборот детали; $\varkappa$ — безразмерная статическая жесткость резания, включающая в себя технологические характеристики процесса резания. Точки на диаграмме, находящиеся в зонах *1*, соответствуют значениям параметров, при которых имеет место авторезонансное вибрационное сверление с выходом инструмента. При этом вибровозбудитель выключен. Точки, находящиеся в зоне *2*, соответствуют значениям параметров, при которых для получения прерывистого резания с регулярной стружкой необходимо включать вибровозбудитель (зоны синхронизации).

Работа поддерживается грантами РФФИ № 05–01–08062, 07–08–00592–а и 07–08–00253–а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A l t i n t a s Y., W e c k M. Chatter stability of metal cutting and grinding // CIRP Annals — Manufacturing Technology, 53 (2004), pp. 619–642.
2. Г у с ь к о в А. М. Динамика двух резцового точения // Станки и инструменты. – 2004. – № 11, 12.
3. G o u s k o v A. M., V o r o n o v S. A., P a r i s H., B a t z e r S. A. Nonlinear dynamics of a machining system with two interdependent delays // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. December 2002. Vol. 7. No. 3, pp. 207–221.
4. T s e n g C. Y., T u n g P. C. Dynamics of a flexible beam with active nonlinear magnetic force // ASME Journal of vibration and acoustics. January 1998. Vol. 120. No. 1, pp. 39–46.
5. T a r i q A. N a y f e h, E d w a r d E m a c i, A l e x a n d e r F. V a k a k i s. Application of nonlinear localization to the optimization of a vibration isolation system // AIAA Journal. August 1997. Vol. 35. No. 8, pp. 1378–1386.
6. Вибрации в технике: Справочник. В 6 т. / Ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). — М.: Машиностроение, 1979 — Т.2. Колебания нелинейных механических систем / Под. ред. И. И. Блехмана. 1979. — 351 с.
7. С к у б о в Д. Ю., Х о д ж а е в К. Ш. Нелинейная электромеханика. — М.: Физматлит, 2003. — 360 с.
8. Г у с ь к о в А. М. Нелинейная динамика вибрационного сверления. Роль уравнений образования новых поверхностей // 4-й Международный конгресс “Конструкторско-технологическая информатика”. – МГТУ-Станкин, 2000. – С. 123–130.
9. Н а й ф э А. Введение в методы возмущений. — М.: Мир, 1984. — 536 с.

Статья поступила в редакцию 15.06.2007