

## ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ТЕНЗОРНО-НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА ПОВЕДЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД

*Показана возможность описания эффекта анизотропии и сопутствующего ему эффекта разрыхления. Приведена методика количественной оценки этих эффектов по результатам испытаний при плоском напряженном состоянии. Изложена математическая модель среды для прогнозирования механических свойств исследуемого материала в других напряженных состояниях.*

Выбор нелинейных уравнений диктуется не только необходимостью повышения точности определения деформаций и напряжений, но и возможностью учета эффектов, которые линейными уравнениями отразить не удастся. Например, анизотропия, вызванная пластической деформацией, нашла свое применение в технологиях обработки металлов, однако описание ее с общих позиций механики деформируемого твердого тела еще не получило детального завершения.

Численные исследования позволяют сделать вывод о том, что указанные эффекты, а следовательно, и тензорная нелинейность, присущи всем тем состояниям, которые вызывают рост пластической деформации. Разгрузку и повторную нагрузку можно принять линейно-упругой, но “разномодульной” из-за остаточной анизотропии. Количественную оценку этого эффекта можно выполнить по тому же алгоритму, что и при активной деформации.

Рассмотрим эффект анизотропии в том смысле, который был дан В.В. Новожиловым [1], а именно, при изменении исходных деформационных свойств материала из-за нарушения первичной структуры. Для описания этого эффекта после некоторых преобразований приведем уравнения в следующей форме [2]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_0 \delta_{ij} + 1/2 \Phi_m S_{ij} + \Phi_d (S_{i\alpha} S_{\alpha j} - 2/9 S_0^2 \delta_{ij}) / S_0; \\ \sigma_{ii} &= S_{ij} + \sigma_0 \delta_{ij}, \quad \sigma_0 = 1/3 \sigma_{ii}, \quad S_0 = (3/2 S_{ij} S_{ij})^{1/2}, \\ \varepsilon_0 &= 1/3 \varepsilon_{ii} \quad (i, j, \alpha = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\sigma_{ij}$ ,  $S_{ij}$  — тензор и девиатор напряжений;  $\sigma_0$  — среднее напряжение;  $\varepsilon_{ij}$  — тензор малых деформаций, соосный с  $\sigma_{ij}$ ;  $\varepsilon_0$  — средняя деформация, которая будет отождествляться с объемной. Она представляется в виде суммы двух величин:

$$\varepsilon_0 = \Phi_k \sigma_0 / 3 + 2 \Phi_d S_0 / 9. \quad (2)$$

Первая величина зависит от среднего напряжения, а вторая  $\varepsilon_0 > 0$  — деформация разрыхления. В уравнениях (1) и (2)  $\Phi_m$ ,  $\Phi_d$  — обобщенные податливости при сдвиге;  $\Phi_k$  — податливости при объемном растяжении или сжатии;  $\alpha$  — параметр, характеризующий склонность среды к разрыхлению.

Если при испытаниях отсутствует равенство отношений между главными компонентами девиатора деформаций с соответствующими компонентами девиатора напряжений, то можно рассмотреть три сдвиговых характеристики:

$$B_i = \gamma_i / \tau_i, \quad (3)$$

где  $\gamma_i = \varepsilon_j - \varepsilon_\alpha$ ;  $\tau_i = (\sigma_j - \sigma_\alpha) / 2$ ;  $i, j, \alpha = 1, 2, 3$ ;  $i \neq j \neq \alpha$ ;  $\varepsilon_i, \sigma_i$  — главные деформации и напряжения. Последние можно представить в виде  $\sigma_i = S_0(C_i/3 + \xi)$ , где  $\xi = \sigma_0/S_0$  — параметр, характеризующий траекторию простого нагружения;  $C_1 = 2 \cos \theta$ ,  $C_2 = \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta$ ,  $C_3 = -(\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta)$ ,  $\theta$  — угол вида напряженного состояния, определяемый из соотношения

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos \left( \frac{9S_{ij}S_{j\alpha}S_{\alpha i}}{2S_0^3} \right), \quad 0 \leq \theta \leq \pi/3.$$

Ранее [2] было показано, что обобщенные податливости при сдвиге могут быть выражены через  $B_i$ :

$$\Phi_m = B_i/3; \quad \Phi_d = \{3[(\Phi_m - B_i)^2]/8\}^{1/2}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4)$$

а при обратном преобразовании получим  $B_i = \Phi_m - 2\Phi_d C_i/3$ . Неподобие девиаторов можно количественно оценить по формуле

$$\operatorname{tg} \omega = 2\Phi_d \sin 3\theta / (3\Phi_m + 2\Phi_d \eta). \quad (5)$$

При этом зависимость между интенсивностью деформаций и интенсивностью напряжений принимает вид

$$e_0 = S_0/3(\Phi_m^2 + 4/3\Phi_m\Phi_d\eta + 4/9\Phi_d^2)^{1/2}, \quad (6)$$

где  $\eta = \cos 3\theta$ ;  $e_0 = (2/3e_{ij}e_{ij})^{1/2}$ ;  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_0\delta_{ij}$ .

Тем самым, обобщенным характеристикам  $\Phi_m$  и  $\Phi_d$  придан конкретный физический смысл и теперь определить их возможно по результатам испытаний. Структура исходных уравнений такова, что они могут быть представлены в другой форме.

Действительно, если уравнения (1) записать для главных деформаций, то они приводятся к виду, характерному для уравнений, описывающих поведение ортотропного тела, а именно [3]:

$$\varepsilon_i = a_{ij}\sigma_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (7)$$

где податливости  $a_{ij}$  являются коэффициентами деформации [3], кото-

рые связаны с техническими характеристиками следующим образом:

$$a_{ii} = E_i^{-1}; \quad a_{ij} = -\nu_{ji}E_j^{-1}, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j; \quad \sum_{i,j} i, j. \quad (8)$$

Здесь  $E_i$  — модули упругости в направлении главных напряжений;  $\nu_{ij}$  — коэффициенты поперечных деформаций. Они могут быть определены из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} E_i^{-1} &= (3\Phi_m + \Phi_k + \Phi_d C_{ii})/9, \quad C_{ii} = C_i(1 + \varkappa); \\ \nu_{ij} &= (3/2\Phi_m - \Phi_k - \Phi_d C_{ij})E_i/9 \quad (i, j = 1, 2, 3); \\ C_{ij} &= C_\alpha + \varkappa C_i \quad (i, j, \alpha = 1, 2, 3; \quad i \neq j \neq \alpha; \quad \sum_{i,j,\alpha} i, j, \alpha). \end{aligned} \quad (9)$$

В некоторых случаях, например, при обработке результатов испытаний, в первом приближении можно принять:  $\varkappa = 0$ ,  $\Phi_k = 1/K$ , где  $K$  — модуль упругости при объемной деформации.

Из анализа уравнений (1) и (6) следует, что отклонение от подобия девиаторов и приобретенная в процессе пластической деформации анизотропия взаимосвязаны. Эта взаимосвязь может быть выражена разницей параметров Лоде. Первый (по напряжениям) определяется по формуле

$$\lambda_\sigma = -2\tau_1/\tau_2 - 1 = 2(C_2 - C_3)/(C_1 - C_3) - 1, \quad (10)$$

которая подчеркивает его независимость от уровня напряженного состояния.

Второй (по деформациям) — учитывая уравнение (7), принимает вид

$$\lambda_\varepsilon = -2\gamma_1/\gamma_2 - 1 = \frac{2[(a_{21}-a_{31})\sigma_1 + (a_{22}-a_{32})\sigma_2 + (a_{23}-a_{33})\sigma_3]}{(a_{11}-a_{31})\sigma_1 + (a_{12}-a_{32})\sigma_2 + (a_{13}-a_{33})\sigma_3} - 1.$$

Тогда разница параметров представляется соотношением

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \lambda_\sigma - \lambda_\varepsilon = \\ &= 2 \left[ \frac{C_2 - C_3}{C_1 - C_3} - \frac{(a_{21}-a_{31})\sigma_1 + (a_{22}-a_{32})\sigma_2 + (a_{23}-a_{33})\sigma_3}{(a_{11}-a_{31})\sigma_1 + (a_{12}-a_{32})\sigma_2 + (a_{13}-a_{33})\sigma_3} \right], \end{aligned} \quad (11)$$

которое для материалов с исходными изотропными свойствами существенно упрощается:

$$\Delta\lambda = 2\Phi_d(\lambda_\sigma + 1)(C_1 - C_2)/(3\Phi_m - 2\Phi_d C_2). \quad (12)$$

Анализ показывает, что

$$\Delta\lambda > 0 \quad (13)$$

для всех  $0 < \theta < \pi/3$ , кроме граничных, соответствующих обобщенным растяжению и сжатию, где  $\lambda_\sigma = \lambda_\varepsilon$  и  $\Delta\lambda/\text{tg } \omega \approx 2$ .

Соотношение (11) можно использовать для изучения свойств ортотропного материала, особенно, когда причиной этой анизотропии было механическое воздействие.

Анализ соотношения (5) показывает, что отличие от нуля характеристики  $\Phi_d$  ведет к различию диаграмм  $S_0 - e_0$ , а также модулей упругости  $E_i$  и коэффициентов  $\nu_{ij}$  в зависимости от  $\theta$ . Следовательно, если среда проявляет анизотропию, названную в работе [4] структурной, т.е. вызванную пластическими сдвигами в кристаллах структурно-неоднородных тел, то с теоретической точки зрения "единой кривой" не должно быть. В реальности разброс этих кривых наблюдается и в экспериментальных исследованиях (например, [5, 6] и др.), в которых основной целью был поиск "единой кривой". Возможно, что этот разброс связан с отмеченными эффектами.

Существенное расхождение диаграмм при растяжении и сжатии, например для серого чугуна, является показателем прежде всего зависимости его механических свойств от среднего напряжения. В этом случае эффект анизотропии и другие эффекты второго порядка оказываются "закрытыми" эффектом разрыхления (дилатансии), к описанию которого, как показано в работе [7], оправдано применение тензорно-линейных уравнений. При этом для таких сред характерным является заметное снижение коэффициента поперечной деформации при растяжении, тогда как для материалов, склонных к анизотропии, при таком испытании наблюдается его возрастание, причем значительно большее, чем дают деформационные теории, предполагающие линейное изменение объемной деформации.

Как отмечено ранее, исходным показателем исследуемой анизотропии является отсутствие равенства отношений главных сдвиговых деформаций с соответствующими главными касательными напряжениями, т.е.  $\gamma_1/\tau_1 \neq \gamma_2/\tau_2 \neq \gamma_3/\tau_3$ . Такое поведение материала, например стали, за пределом текучести можно обнаружить в результатах испытаний, проводимых на трубчатых образцах [5]. Изложенная информация, в частности графики  $\sigma - \varepsilon$  для различных видов двухосного растяжения, достаточна, чтобы восстановить для определенного уровня  $S_0$  зависимость  $\Delta\lambda - \theta$ .

Принятая методика состоит в следующем. После вычисления напряжений  $\sigma_t = S_0/\sqrt{1 - k + k^2}$ ,  $\sigma_z = k\sigma_t$ , где  $k$  — коэффициент пропорциональности, принимая  $\sigma_r = 0$ , диаграммы  $\sigma - \varepsilon$  позволяют определить окружную  $\varepsilon_t$  и осевую  $\varepsilon_z$  деформации. На первой итерации радиальная деформация  $\varepsilon_r^a = 3\varepsilon_0 - \varepsilon_t - \varepsilon_z$  определяется по условию, принятому в работе [5], что объемная деформация линейно-упругая. Эти сведения дают возможность вычислить по уравнениям (3) податливости  $B_i$  и характеристики  $\Phi_m$  и  $\Phi_d$  для испытаний с разными  $k$ , а следовательно, и  $\theta = \arctg(\sqrt{3}k)/(2 - k)$ .

Большой разброс значений  $\Phi_d$  потребовал определения среднего значения  $\Phi_d$  и  $\Phi_m$  для вычисления  $\Delta\lambda$  по соотношению (12). На второй и последующих операциях, вычисляя  $\lambda_\varepsilon = \lambda_\sigma - \Delta\lambda$ , уточняют

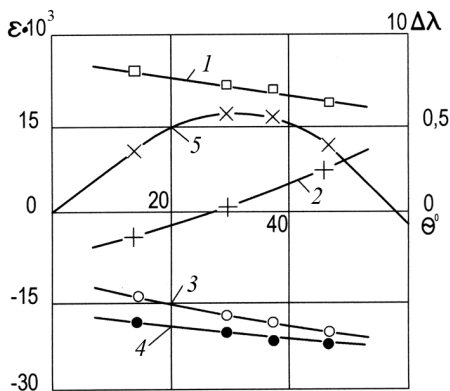


Рис. 1. Зависимость деформаций и разницы параметров Лоде от угла  $\theta$

результаты испытаний группы образцов при совместной их обработке.

На рис. 1 показаны кривые 1, 2, 3 и 4 для деформаций соответственно  $\varepsilon_t$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $\varepsilon_r^*$  и  $\varepsilon_r^a$ , а также кривая 5 для  $\Delta\lambda$ , иллюстрирующие зависимость этих величин от  $\theta$ . В табл. 1 приведены исходные данные и результаты расчетов при  $S_0 = 780$  МПа.

Таблица 1

$\theta^\circ$	$\sigma_t$	$\varepsilon_t \cdot 10^3$	$\varepsilon_z \cdot 10^3$	$\varepsilon_r^* \cdot 10^3$	$\varepsilon_r^a \cdot 10^3$	$\lambda_\varepsilon$	$\Delta\lambda$	$\Phi_m \cdot 10^5$	$\Phi_d \cdot 10^6$
13,9	865	24,7	-3,7	-14,24	-18,99	-0,553	0,053	8,25	5,44
30	901	21,6	0,9	-17,64	-19,98	-0,087	0,087	8,46	6,4
36,6	895	21,1	3,5	-19,88	-21,94	0,123	0,077	9,07	6,28
46,1	865	18,3	7,5	-21,17	-22,98	0,440	0,060	9,15	6,44

Найденные значения характеристик  $\Phi_m$  и  $\Phi_d$  дают возможность оценить анизотропию, возникающую в ходе пластической деформации при  $\Phi_k = K^{-1}$  и  $\varkappa = 0$  по соотношениям (8) и (9). Результаты представлены в табл. 2.

Таблица 2

$\theta^\circ$	$E_1 \cdot 10^{-4}$	$E_2 \cdot 10^{-4}$	$E_3 \cdot 10^{-4}$	$\nu_{12}$	$\nu_{21}$	$\nu_{13}$	$\nu_{31}$	$\nu_{23}$	$\nu_{32}$
13,9	3,60	3,60	3,66	0,48	0,50	0,46	0,49	0,43	0,44
30	3,33	3,47	3,63	0,49	0,51	0,45	0,49	0,42	0,44
36,6	3,14	3,22	3,38	0,49	0,51	0,45	0,48	0,43	0,45
46,1	3,11	3,17	3,36	0,50	0,51	0,44	0,48	0,43	0,46

Из табл. 2 видно, что наибольшая разница секущих модулей упругости по разным направлениям составляет 5...6%, тогда как

радиальную деформацию

$$\varepsilon_r^* = [2\varepsilon_z - \varepsilon_t(1 + \lambda_\varepsilon)] / (1 - \lambda_\varepsilon),$$

которую определяют из исходной формулы для параметра  $\lambda_\varepsilon$ . Затем повторяются вычисления  $B_i$ ,  $\Phi_m$ ,  $\Phi_d$ .

На этих итерациях  $\Phi_d$  и  $\Phi_m$  уже не осредняются. Различие значений  $\varepsilon_r^*$  на третьей и четвертой итерациях составляет менее 2%. Таким образом, методика, опираясь на выводы (9) и (10), вытекающие из уравнений (1), использует результаты

разница коэффициентов поперечной деформации превышает 17%. Описанная методика позволяет провести подобный анализ и на других уровнях  $S_0 = \text{const}$ . На рис. 2 для  $\theta = \pi/6$  представлены кривые 1, 2, 3, 4 для  $e_0$ ,  $\Delta\lambda$ ,  $\Phi_m$ ,  $\Phi_d$  соответственно, показывающие их зависимости от интенсивности напряжений  $S_0$ . Кривая 5 относится к деформации разрыхления:  $\varepsilon_p = \varepsilon_0 - \varepsilon_\nu$ , где  $\varepsilon_0 = (\varepsilon_t + \varepsilon_z + \varepsilon_r^*)/3$ ,  $\varepsilon_\nu = \sigma_0/3K$ . Эта кривая указывает на то, что в процессе развития анизотропии деформация разрыхления может иметь место.

Все кривые являются явно возрастающими, кроме кривой 2 для  $\Delta\lambda$ , на которой наблюдается (с приближением к предельному напряжению) стабилизация значения. Подобное поведение можно заметить [5] у образцов с непропорциональным нагружением, для которых на диаграмме  $\lambda_\varepsilon - \lambda_\sigma$  видно, что разница  $\Delta\lambda$  остается примерно неизменной при возрастающей пластической деформации.

Полученные результаты расчетов табл. 2 и графики на рис. 2 подтверждают наличие эффектов анизотропии и разрыхления, а высокие значения для  $\nu_{12}$  и  $\nu_{21}$  находятся в согласии с результатами исследований, отмеченных в работе [4]. Далее приведена математическая модель, в основе которой положены уравнения (1) и (7).

Функциональная зависимость обобщенных характеристик от инвариантов тензора напряжений обусловлена выбором конкретного вида потенциала деформаций, а именно учетом зависимости нелинейной деформации как от  $S_0$  и  $\theta$ , так и среднего напряжения  $\sigma_0$  [8]:

$$\Phi = \sigma_0^2/2K + S_0^2/6\mu + g(\sigma_0, S_0)\chi(\theta)/3\mu, \quad (14)$$

где  $\mu$  и  $K$  — модули упругости при сдвиге и объемной деформации соответственно  $g(\sigma_0, S_0)$  и  $\chi(\theta)$ -функции.

Первая представляется выражением

$$g(\sigma_0, S_0) = b_0(S_0 + c_0\sigma_0)^2 S_0^m/m = b_0 C_n^2 S_0^{m+2}/m, \quad (15)$$

а вторая — в виде  $\chi(\theta) = 1 + a\eta$ , где  $C_n = (1 + c_0\xi)$ ;  $a$ ,  $b_0$ ,  $c_0$ ,  $m$  — постоянные величины.

Пользуясь дифференциальными соотношениями

$$\Phi_m = \frac{1}{3S_0} \left[ \frac{\partial\Phi}{\partial S_0} + \frac{\eta}{S_0 \sin 3\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \right], \quad \Phi_d = -\frac{9}{2S_0^2 \sin 3\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \quad \varepsilon_0 = \frac{1}{3} \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_0}, \quad (16)$$

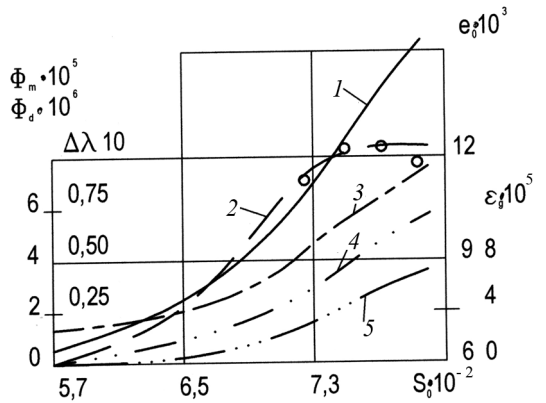


Рис. 2. Зависимость  $\Delta\lambda$ ,  $\Phi_m$ ,  $\Phi_d$ ,  $e_0$  и  $\varepsilon_p$  от интенсивности напряжений  $S_0$

находим следующие выражения:

$$\Phi_m = (1 + A_1 S_u^m) / \mu, \quad \Phi_d = A_2 S_u^m / \mu,$$

где  $A_1 = b C_n [2\chi/m + C_n(\chi - 3a\eta/m)]$ ;  $A_2 = 9ab C_n^2 / 2m$ ;  $b = b_0 S_b^m$ ;  $S_u = S_0 / S_b$ ;  $S_b$  – предельное напряжение, которое удобно представить как часть модуля сдвига  $S_b = \alpha_1 \mu$ , где  $\alpha_1 < 1$  – некоторый коэффициент, устанавливаемый в ходе отработки программы расчета.

Выбор потенциала деформаций в форме (14) определяет среднюю деформацию, как и предполагалось вначале, формулой (2) в виде двух слагаемых:  $\varepsilon_0 = \varepsilon_\nu + \varepsilon_p$ ;  $\varepsilon_\nu = \Phi_k \sigma_0 / 3$ , где  $\Phi_k = (1 + A_3 S_u^m) / K$  – податливость среды при объемном растяжении или сжатии,  $A_3 = 2b C_0^2 \chi K / m \mu$ ;  $\varepsilon_p = 2\varpi \Phi_d S_0 / 9 \geq 0$ ,  $\varpi = 2C_0 \chi / 9a C_n^2$ ,  $\varepsilon_p$  – деформация разрыхления.

Процесс деформации заканчивается разрушением и, естественно, должен влиять на форму предельной поверхности. Ограничиваясь пластичными структурно-неоднородными материалами, диаграммы которых описываются степенными функциями при простом нагружении, пользуясь идеями, изложенными в работах [9, 10], для вычисления предельных напряжений изложенную модель необходимо дополнить следующим критерием:

$$S_{0п} = [S_v + S_\tau / \chi(\theta) C_n(\xi)] D(\xi).$$

Функция  $\chi(\theta) = 1 + a\eta$ , где  $a$  – константа, значение которой должно подчиняться условию выпуклости поперечного сечения поверхности разрушения [11], как и в уравнении (14), учитывает зависимость механических свойств от  $\theta$ . С введением  $\chi(\theta)$  это сечение отличается от окружности. Функции  $C_n(\xi) = (1 + C_0 \xi)$  и  $D(\xi) = (1 + \xi S_0 / \sigma_k)^{m_1}$  (где  $C_0$ ,  $m_1$ ,  $\sigma_k$  – константы) формируют меридиональное сечение, также не нарушая его выпуклости;  $\sigma_k$  – напряжение, при котором разрушение происходит без пластических деформаций – отрывом. Предполагается, что  $S_v$  – напряжение, близкое по значению к пределу упругости, а напряжения  $S_0 > S_v$  вызывают процесс структурных изменений, не зависящий от времени.

Для каждого значения  $\xi$  предельное напряжение вычисляется методом последовательных приближений. Причем все множество  $\xi$  плоского напряженного состояния (от  $-2/3$  при двухосном сжатии до  $+2/3$  при двухосном растяжении) определяется зависимостью  $\xi = -2/3 \cos \theta_c$ , где  $0 \leq \theta_c \leq \pi$  – угловая координата, графически отображающая результаты расчетов в виде непрерывных кривых, объединяющих три отрезка. Первый относится к  $0 \leq \theta_c \leq \pi/3$  ( $-2/3 \leq \xi \leq -1/3$ ), второй – к  $\pi/3 \leq \theta_c \leq 2\pi/3$  ( $-1/3 \leq \xi \leq 1/3$ ) и третий – к  $2\pi/3 \leq \theta_c \leq \pi$  ( $1/3 \leq \xi \leq 2/3$ ).

Последнему принадлежат экспериментальные исследования, анализ которых проведен ранее. Результаты этого анализа позволяют отработать программу расчета и уточнить все константы. Численный

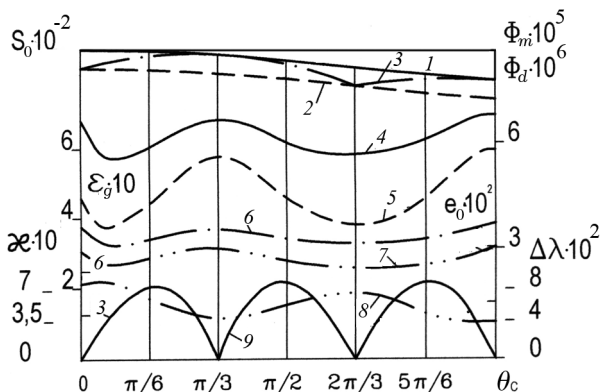


Рис. 3. Зависимость  $S_{0n}$ ,  $\Phi_m$ ,  $\Phi_d$ ,  $e_0$ ,  $\epsilon_p$ ,  $\xi$  и  $\Delta\lambda$  от угла  $\theta_c$

анализ проведен для плоского напряженного состояния, чтобы оценить поведение среды на всех трех отрезках.

На рис. 3 кривые 1, 2 и 3 отражают, как изменяются предельные напряжения при изменении параметра  $\xi$  от  $-2/3$  до  $+2/3$ . Первая — для  $\eta = -1$ , т.е. обобщенного сжатия, вторая для  $\eta = 1$  — обобщенного растяжения, третья для  $-1 \leq \eta \leq 1$  — плоского напряженного состояния. Третья кривая состоит из трех отрезков. В пространстве координат  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  точки каждого отрезка лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Кривые 4 и 5 (см. рис. 3) иллюстрируют поведение обобщенных характеристик  $\Phi_m$  и  $\Phi_d$  соответственно. Характеристика  $\Phi_k$  очень незначительно отличается от значения податливости  $K^{-1}$  и поэтому здесь не приведена. Кривая 6 показывает, как изменяются предельные значения интенсивности деформации  $e_0$ , а кривая 7, почти повторяя ее по форме, отличаясь по значению более чем в 300 раз, представляет собой деформацию разрыхления  $\epsilon_p$ . Кривая 8 относится к параметру  $\xi$ .

Кривая 9, иллюстрирующая изменение  $\Delta\lambda$  — разницы параметров Лодэ, с очень небольшими изменениями повторяется на всех трех отрезках координаты  $\theta_c$  в форме несколько несимметричной положительной полуволны, что согласуется с выводом (13). Тот факт, что максимальное значение  $\Delta\lambda$  очень незначительно уменьшается с ростом отрицательных значений  $\xi$ , т.е. с повышением внешнего давления, говорит о том, что эффект анизотропии, а следовательно, и тензорная нелинейность, присущи всем тем состояниям, которые вызывают рост пластической деформации.

На рис. 4 кривые 1, 2 и 3 показывают различия между собой секущих модулей  $E_1, E_2, E_3$  соответственно. В поведении модулей обнаруживается симметрия. Так, относительно  $\theta_c = 2\pi/3$ , что соответствует простому растяжению, кривые для  $E_i$  на третьем отрезке почти симметричны соответствующим кривым на втором отрезке, а относительно  $\theta_c = \pi/3$ , что соответствует простому сжатию, между этими



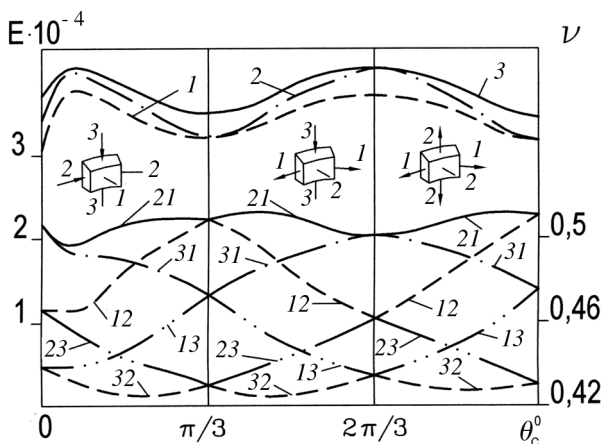


Рис. 4. Зависимость модулей упругости  $E_1, E_2, E_3$  и коэффициентов поперечных деформаций от угла  $\theta_c$

же кривыми с теми же индексами наблюдается неполная симметрия. Эта симметрия вполне объяснима: на первом отрезке угол вида напряженного состояния  $\theta$  изменяется от  $0$  до  $60^\circ$ , на втором — от  $60^\circ$  до  $0$ , на третьем опять от  $0$  до  $60^\circ$ , т.е. значения секущих модулей зависят не только от  $S_0$ , но и от  $\theta$ .

Аналогичная симметрия наблюдается и для коэффициентов поперечной деформации. Каждый коэффициент  $\nu_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3; i \neq j$ ) указывает на величину поперечной деформации в  $j$ -м направлении. Кривые 21, 12, 31, 13, 23, 32, представляющие коэффициенты  $\nu_{ij}$  с соответствующими индексами, имеют изломы при  $\theta_c = \pi/3$  и  $2\pi/3$ . Относительно этих значений аргумента отрезки кривых имеют неполную симметрию. Эта симметрия и равенство некоторых коэффициентов при растяжении и сжатии создают своеобразную сетку теоретических кривых линий, подчеркивающих зависимость коэффициентов упругости от вида напряженного состояния.

При состояниях, соответствующих меридиональным сечениям поверхности разрушения, например, для обобщенных растяжения, сжатия и чистого сдвига ( $\theta_c = \pi/2$ ), следует ожидать их зависимость от  $\sigma_0$  в виде плавных кривых.

Таким образом, математическую модель следует рассматривать как инструмент для прогнозирования результатов экспериментальных исследований, способных дать оптимальный набор конкретных испытаний.

Устоявшимся представлением является то, что после пластической деформации происходит линейно-упругая разгрузка. Причем модуль упругости равен или достаточно близок исходному значению [12]. Однако вполне естественно ожидать, что остаточные явления должны в той или иной степени проявиться. Чтобы упростить задачу описания этого явления, примем, что соосность  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  не нарушается

и в момент разгрузки значения обобщенных характеристик являются известными:  $\Phi_k = 1/K$ ,  $\Phi_m = 1/\mu$ , а третья может быть вычислена исходя из соотношения (12):

$$\Phi_d = 3\Phi_m \Delta\lambda / 2A_4,$$

где  $A_4 = (\lambda_\sigma + 1)(C_1 - C_2) - \Delta\lambda C_3$ . Предположим, что значение  $\Delta\lambda$  остается в момент разгрузки неизменным вместе с остаточными пластическими деформациями. Это предположение основано на результатах исследований Е. Девиса [6]. Деформации в испытаниях измерялись после разгрузки, однако разница параметров Лоде примерно такая же, как и в других подобных исследованиях.

Располагая значениями всех трех характеристик, вычисляются, как и ранее, значения коэффициентов упругости, которые приводятся в табл. 3.

Таблица 3

$\theta^\circ$	$E_1 \cdot 10^{-5}$	$E_2 \cdot 10^{-5}$	$E_3 \cdot 10^{-5}$	$\nu_{12}$	$\nu_{21}$	$\nu_{13}$	$\nu_{31}$	$\nu_{23}$	$\nu_{32}$
13,9	2,07	2,17	2,21	0,32	0,33	0,30	0,32	0,26	0,27
30	2,08	2,15	2,23	0,32	0,34	0,29	0,31	0,26	0,28
36,6	2,08	2,14	2,22	0,33	0,34	0,29	0,31	0,27	0,28
46,1	2,09	2,13	2,22	0,33	0,34	0,28	0,30	0,27	0,28

Следует отметить, что повторная нагрузка будет проходить с этими же постоянными коэффициентами до  $S_0$ , при котором была произведена разгрузка. Материал при этом будет вести себя как “разномодульная” среда [11]. В этой работе показано, что корректное отражение этого эффекта требует использования тензорно-нелинейных уравнений. В таком случае “разномодульность” следует отнести к частному случаю анизотропии.

Проведенный анализ уравнений (1) и (7) с опорой на результаты работ [4, 5] показывает, что имеет место эффект анизотропии (см. табл. 3). В подтверждение этого предположения можно сослаться на опыты А.М. Жукова по “догрузке”. В этом исследовании при изменении направления главных напряжений (за растяжением, до появления пластических деформаций образца, следовало его кручение) модуль сдвига при “догрузке” значительно расходится со значениями, определенными по теориям, предполагающим тензорную линейность.

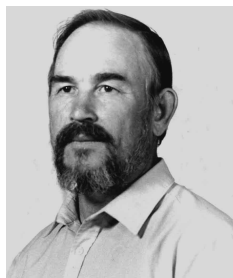
В заключение следует отметить практическую полезность рассмотренных уравнений, состоящую в том, что только по трем скалярным функциям  $\Phi_m$ ,  $\Phi_d$  и  $\Phi_k$  определяется несколько нелинейных коэффициентов деформаций. Предложенную модель можно рассматривать как первый шаг по пути описания поведения пластических материалов при сложном нагружении. Модель является практическим приложением теории, разработанной В.В. Новожиловым [1], сохраняет

преимущество развития теории пластичности. Действительно, при  $\chi(\theta) = 1$  ее следует рассматривать как вариант деформационной теории, учитывающей зависимость деформации как от интенсивности напряжений  $S_0$ , так и среднего напряжения  $\sigma_0$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новожилов В. В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно-упругой среде // ПММ. – 1951. – Т. 15. Вып. 2. – С. 183–194.
2. Комков К. Ф. К определению параметров Лоде при обработке результатов испытаний // Изв. РАН. МТТ. – 2005. – № 2. – С. 126–135.
3. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
4. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. – М.: Изд-во иностр. лит., 1969. – 863 с.
5. Жуков А. М. Сложное нагружение и теории пластичности изотропных материалов // Изв. АН СССР. ОТН. – 1955. – № 8. – С. 81–92.
6. Девис Е. Рост напряжений с изменением деформаций и зависимость ”напряжения - деформации“ в пластической области для меди при сложном напряженном состоянии // Теория пластичности. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – С. 336–374.
7. Ломакин Е. В. Определяющие соотношения деформационной теории для дилатирующих сред // Изв. АН. МТТ. – 1991. – № 6. – С. 66–75.
8. Комков К. Ф. Тензорно-нелинейные определяющие соотношения для сред, проявляющих деформационную анизотропию и дилатансию, и их анализ // Естественные и технические науки. – 2003. – № 3(6). – С. 13–21.
9. Новожилов В. В., Рыбакина О. Г. Перспектива построения критерия прочности при сложном нагружении // Изв. АН СССР. МТТ. – 1966. – № 6. – С. 103–114.
10. Лукша Л. К. О нерациональности предельной поверхности в прочности // Докл. АН БССР. – 1977. – Т. XXI. № 2. – С. 134–137.
11. Саркисян М. С. О соотношении теории упругости изотропных тел, материал которых по разному сопротивляется растяжению и сжатию // Изв. АН СССР. МТТ. – 1987. – № 5. – С. 87–94.
12. Жуков А. М. Разгрузка пластически деформированных материалов и последующая нагрузка // Изв. АН СССР. МТТ. – 1989. – № 2. – С. 179–183.

Статья поступила в редакцию 24.01.2006



Кирилл Федотович Комков родился в 1938 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1966 г. Канд. техн. наук, доцент военного технического университета. Автор более 30 публикаций в области механики материалов.

K.F. Komkov (b. 1938) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1966. Ph. D. (Eng.), assoc. professor of the Military and Technical University. Author of more than 30 publications in the field of mechanics of materials.