

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ УГЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ НЕУПРАВЛЯЕМОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА МЕТОДАМИ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ СИСТЕМ

Проведен качественный анализ вращательного движения летательного аппарата как движения динамической системы с учетом влияния различных асимметрий и эксцентриситетов силы тяги. Показано, что наличие эксцентриситетов силы тяги и малых асимметрий не только изменяет величину угла атаки при резонансных режимах движения летательного аппарата, но и вызывает образование особых точек.

В процессе выбора параметров неуправляемых летательных аппаратов (ЛА) различного назначения необходимо проанализировать основные свойства динамики движения, оценить устойчивость, а также знать влияние различных факторов на изменение характера их движения. Подобные ЛА вращаются вокруг продольной оси, имеют не только симметричную внешнюю форму, но и малую асимметрию массово-конструктивных характеристик, что, в свою очередь, усложняет характер их пространственного углового движения. Поэтому в процессе проектирования и разработки подобных ЛА необходимо анализировать динамику углового движения аппаратов с учетом возмущений различного типа. Наиболее полную картину пространственного движения ЛА можно получить, используя метод численного интегрирования сложных нелинейных математических моделей. Однако такой путь решения задачи дает лишь частные (численные) результаты.

Оценить влияние величин конструктивных параметров ЛА и возмущающих факторов на изменение характера углового движения можно методами качественной теории дифференциальных уравнений. Топологически классифицировать дифференциальные уравнения в многомерном фазовом пространстве практически невозможно, поэтому качественный анализ динамики движения обычно проводят для выбранных параметров конкретного аппарата.

Угловое пространственное движение неуправляемого ЛА с учетом малых массово-конструктивных и геометрических асимметрий, а также эксцентриситетов силы тяги можно описать в соответствии с работой [1] следующей системой уравнений:

$$\ddot{\alpha} = - \left[\frac{qS\ell}{J} |m_z^\alpha| + \frac{q^2 S^2 \ell^2}{mJv^2} |m_z^{\bar{\omega}}| (C_n^\alpha - C_\tau) + \frac{qS\ell^2}{mJv^2} |m_z^{\bar{\omega}}| P_\tau - \frac{J - J_x}{J} \omega_x^2 \right] \alpha -$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{J - J_x}{J} \frac{qS}{mv} (C_n^\alpha - C_\tau) \omega_x + \frac{qS\ell^2}{Jv} |m_z^{\bar{\omega}}| \omega_x + \frac{J - J_x}{J} \frac{P_\tau}{mv} \omega_x \right] \beta - \\
& - \left(\frac{J - J_x}{J} \omega_x + \omega_x \right) \dot{\beta} - \left[\frac{qS}{mv} (C_n^\alpha - C_\tau) + \frac{qS\ell^2}{Jv} |m_z^{\bar{\omega}}| + \frac{P_\tau}{mv} \right] \dot{\alpha} + \\
& + \frac{J - J_x}{J} \left(h_\beta \omega_x + \frac{P_\tau}{mv} \varepsilon_\tau \sin \varphi_1 \right) \omega_x - \frac{qS\ell^2}{mJv^2} |m_z^{\bar{\omega}}| P_\tau \varepsilon_\tau \cos \varphi_1 + \\
& + \frac{qS\ell}{J} \left(m_{z_0} - C_\tau \frac{\Delta y}{\ell} \right) + \frac{P_\tau}{J} (d_\tau \cos \varphi_2 + \varepsilon_\tau x_\tau \cos \varphi_1);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\beta} = & - \left[\frac{qS\ell}{J} |m_z^\alpha| + \right. \\
& + \left. \frac{q^2 S^2 \ell^2}{mJv^2} |m_z^{\bar{\omega}}| (C_n^\alpha - C_\tau) + \frac{qS\ell^2}{mJv^2} |m_z^{\bar{\omega}}| P_\tau - \frac{J - J_x}{J} \omega_x^2 \right] \beta + \\
& + \left[\frac{J - J_x}{J} \frac{qS}{mv} (C_n^\alpha - C_\tau) \omega_x + \frac{qS\ell^2}{Jv} |m_z^{\bar{\omega}}| \omega_x + \frac{J - J_x}{J} \frac{P_\tau}{mV} \omega_x \right] \alpha + \\
& + \left(\frac{J - J_x}{J} \omega_x + \omega_x \right) \dot{\alpha} - \left[\frac{qS}{mv} (C_n^\alpha - C_\tau) + \frac{qS\ell^2}{Jv} |m_z^{\bar{\omega}}| + \frac{P_\tau}{mv} \right] \dot{\beta} - \\
& - \frac{J - J_x}{J} \left(h_\alpha \omega_x - \frac{P_\tau}{mv} \varepsilon_\tau \cos \varphi_1 \right) \omega_x + \frac{qS\ell^2}{mJv^2} |m_z^{\bar{\omega}}| P_\tau \varepsilon_\tau \cos \varphi_1 + \\
& + \frac{qS\ell}{J} \left(m_{y_0} + C_\tau \frac{\Delta z}{\ell} \right) + \frac{P_\tau}{J} (d_\tau \sin \varphi_2 + \varepsilon_\tau x_\tau \sin \varphi_1);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_x = & \frac{qS\ell}{J_x} m_{x_0} - \frac{qS\ell^2}{J_x v} |m_x^{\bar{\omega}}| \omega_x + \\
& + \frac{qS}{J_x} C_n^\alpha (\Delta z \alpha + \Delta y \beta) + \frac{J - J_x}{J_x} (h_\alpha \omega_y - h_\beta \omega_z) \omega_x + \frac{P_\tau}{J_x} d_\tau \varepsilon_\tau \sin(\varphi_1 - \varphi_2),
\end{aligned} \tag{1}$$

где J – момент инерции ЛА относительно поперечной оси ($J = J_y = J_z$); h_α, h_β – безразмерные центробежные моменты инерции, $h_\alpha = \frac{J_{xz}}{J - J_x}$ и $h_\beta = \frac{J_{xy}}{J - J_x}$ (J_{xz}, J_{xy} – центробежные моменты инерции); $\Delta y, \Delta z$ – координаты бокового смещения центра масс ЛА от продольной оси симметрии; ε_τ, d_τ – угловой и линейный эксцентриситеты силы тяги ЛА; P_τ – сила тяги; x_τ – расстояние от центра масс ЛА до плоскости, включающей точку положения силы тяги; φ_1, φ_2 – углы положения плоскостей углового и линейного эксцентриситетов силы тяги ЛА; m, ℓ – масса и длина ЛА; S – площадь миделевого сечения ЛА; v – скорость ЛА относительно воздушной среды; q – скоростной напор.

В работе [2] показано, что резкое изменение динамики углового движения ЛА возможно при совпадении угловой скорости вращения ЛА вокруг продольной оси ω_x и так называемой “критической” угловой скорости $\omega_{кр}$, где $\omega_{кр} = \omega_c \sqrt{\frac{J}{J - J_x}}$; $\omega_c = \sqrt{\frac{qS\ell}{J} |m_z^\alpha|}$ – частота собственных колебаний ЛА.

Введем безразмерный параметр ($\lambda = \frac{\omega_x}{\omega_{кр}}$) и преобразуем уравнения системы (1) для случая, когда $\omega_{кр} = \text{const}$:

$$\begin{aligned} & \ddot{\alpha} + \omega_c^2 \nu_1 \dot{\alpha} + \omega_c^2 (1 + \Delta\lambda_1 - \lambda^2) \alpha + \\ & + \left(2 - \frac{J_x}{J} \right) \omega_{кр} \lambda \dot{\beta} + \omega_c^2 \mu_1 \lambda \beta = \omega_c^2 (\alpha_0 + h_\beta \lambda^2) + \\ & + \omega_c^2 \bar{P}_\tau \varepsilon_\tau \sin \varphi_1 \frac{\lambda}{\omega_{кр}} - \omega_c^2 \bar{P}_\tau \varepsilon_\tau \cos \varphi_1 \frac{\bar{m}_z^\omega}{\bar{m}_z^\alpha} + \omega_c^2 \frac{P_\tau}{\bar{m}_z^\alpha J} (\varepsilon_\tau x_\tau \cos \varphi_1 + d_\tau \cos \varphi_2); \\ & \ddot{\beta} + \omega_c^2 \nu_1 \dot{\beta} + \omega_c^2 (1 + \Delta\lambda_1 - \lambda^2) \beta - \\ & - \left(2 - \frac{J_x}{J} \right) \omega_{кр} \lambda \dot{\alpha} - \omega_c^2 \mu_1 \lambda \alpha = \omega_c^2 (\beta_0 - h_\alpha \lambda^2) + \\ & + \omega_c^2 \bar{P}_\tau \varepsilon_\tau \cos \varphi_1 \frac{\lambda}{\omega_{кр}} + \omega_c^2 \bar{P}_\tau \varepsilon_\tau \cos \varphi_1 \frac{\bar{m}_z^\omega}{\bar{m}_z^\alpha} + \omega_c^2 \frac{P_\tau}{\bar{m}_z^\alpha J} (\varepsilon_\tau x_\tau \sin \varphi_1 + d_\tau \sin \varphi_2); \\ & \dot{\lambda} + \left(\frac{J}{J_x} - 1 \right) \left[(h_\alpha \alpha + h_\beta \beta) \omega_{кр} \lambda - \right. \\ & \left. - (\bar{C}_y^\alpha + \bar{P}_\tau) (h_\alpha \beta - h_\beta \alpha) + \varepsilon_\tau (h_\alpha \sin \varphi_1 + h_\beta \cos \varphi_1) \bar{P}_\tau \right] \lambda + \\ & + \bar{m}_x^\omega \lambda = \left[\bar{m}_{x_0} + \bar{C}_n^\alpha (\Delta z \alpha + \Delta y \beta) + \frac{P_\tau}{J_x} \varepsilon_\tau d_\tau \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right] \omega_{кр}^{-1}; \quad (2) \end{aligned}$$

где $\bar{C}_n^\alpha = \frac{qS}{J_x} C_n^\alpha$; $\bar{C}_y^\alpha = \frac{qS}{mv} (C_n^\alpha - C_\tau)$; $\bar{P}_\tau = \frac{P_\tau}{mv}$; $\bar{m}_z^\alpha = \frac{qS\ell}{J} |m_z^\alpha|$;
 $\bar{m}_z^\omega = \frac{qS\ell^2}{Jv} |m_z^\omega|$; $\bar{m}_{x_0} = \frac{qS\ell}{J_x} m_{x_0}$; $\bar{m}_x^\omega = \frac{qS\ell^2}{J_x v} |m_x^\omega|$; $\alpha_0 = -\alpha_a - \frac{\Delta y}{\ell} \frac{C_\tau}{|m_z^\alpha|}$;
 $\beta_0 = -\beta_a + \frac{\Delta z}{\ell} \frac{C_\tau}{|m_z^\alpha|}$; α_a, β_a – балансировочные углы атаки и скольжения, обусловленные малой асимметрией формы ЛА ($\alpha_a = -m_{z_0}/|m_z^\alpha|$; $\beta_a = -m_{y_0}/|m_z^\alpha|$).

Далее рассмотрим вопросы обеспечения устойчивости резонансных режимов углового движения ЛА и условий возникновения и существования устойчивого резонанса. Известно, что особыми точками

любой динамической системы, описываемой нелинейными дифференциальными уравнениями, являются корни уравнений, описывающих установившееся движение. Запишем на основании системы (2) уравнения установившегося движения:

$$(1 + \Delta\lambda_1 - \lambda^2)\alpha + \mu_1\lambda\beta = \alpha_0 + h_\beta\lambda^2 + \bar{P}_T\varepsilon_T \sin \varphi_1 \frac{\lambda}{\omega_{кр}} - \bar{P}_T\varepsilon_T \cos \varphi_1 \frac{\bar{m}_z^\omega}{\bar{m}_z^\alpha} + \frac{P_T}{\bar{m}_z^\alpha J} (\varepsilon_T x_T \cos \varphi_1 + d_T \cos \varphi_2);$$

$$(1 + \Delta\lambda_1 - \lambda^2)\beta - \mu_1\lambda\alpha = \beta_0 - h_\alpha\lambda^2 + \bar{P}_T\varepsilon_T \cos \varphi_1 \frac{\lambda}{\omega_{кр}} + \bar{P}_T\varepsilon_T \sin \varphi_1 \frac{\bar{m}_z^\omega}{\bar{m}_z^\alpha} + \frac{P_T}{\bar{m}_z^\alpha J} (\varepsilon_T x_T \sin \varphi_1 + d_T \sin \varphi_2);$$

$$\left(\frac{J}{J_x} - 1\right) \left[(h_\alpha\alpha + h_\beta\beta)\omega_{кр}\lambda + (\bar{C}_y^\alpha + \bar{P}_T)(h_\beta\alpha - h_\alpha\beta) + \varepsilon_T(h_\alpha \sin \varphi_1 + h_\beta \cos \varphi_1)\bar{P}_T \right] \lambda + \bar{m}_x^\omega \lambda = \left[\bar{m}_{x_0} + \bar{C}_n^\alpha(\Delta z\alpha + \Delta y\beta) + \frac{P_T}{J_x}\varepsilon_T d_T \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right] \omega_{кр}^{-1}. \quad (3)$$

Определим корни системы (3) и проведем линеаризацию уравнений системы (2) в окрестности этих корней. Полученную линейную систему можно использовать для исследования устойчивости динамической системы (2) в окрестности особых точек. Система дифференциальных уравнений (2) является тринадцатипараметрическим семейством относительно семи конструктивных параметров (\bar{C}_n^α , \bar{C}_y^α , \bar{m}_z^α , \bar{m}_z^ω , \bar{m}_{x_0} , \bar{m}_x^ω , \bar{P}_T) и шести возмущающих параметров малых асимметрий и эксцентриситетов силы тяги ЛА (т.е. α_0 , β_0 , h_α , h_β , ε_T , d_T).

Таким образом, при полном параметрическом анализе приходится рассматривать глобальную картину разбиения семимерного фазового пространства динамической системы (2) при тринадцатимерном функциональном пространстве параметров.

В общем виде методами качественной теории этого сделать невозможно, поэтому необходимо фиксировать какую-то часть параметров и получить области структурной устойчивости на гиперповерхности в пространстве параметров.

Проведем анализ углового движения ЛА при наличии асимметрии внешней формы, бокового смещения центра масс и эксцентриситетов силы тяги. Рассмотрим случай, когда $h_\alpha = 0$, $h_\beta = 0$, $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 \neq 0$, $\varepsilon_T \neq 0$, $d_T \neq 0$. Решая систему (3) относительно углов атаки (α) и скольжения (β), получим следующие выражения:

$$\beta = \frac{(1 + \Delta\lambda_1 - \lambda^2)(\beta_0 + \varepsilon_T K_{11} + d_T K_{12}) + \mu_1 \lambda (\varepsilon_T K_{21} + d_T K_{22})}{(1 + \Delta\lambda_1 - \lambda^2)^2 + (\mu_1 \lambda)^2} \equiv \beta(\lambda); \quad (4)$$

$$\alpha = \frac{(1 + \Delta\lambda_1 - \lambda^2)(\varepsilon_T K_{21} + d_T K_{22}) - \mu_1 \lambda (\beta_0 + \varepsilon_T K_{11} + d_T K_{12})}{(1 + \Delta\lambda_1 - \lambda^2)^2 + (\mu_1 \lambda)^2} \equiv \Phi_1(\lambda); \quad (5)$$

$$\Phi_2(\lambda) \equiv \alpha = \frac{\bar{m}_x^\omega \omega_{\text{кр}}}{\bar{C}_n^\alpha \Delta z} \lambda - \frac{\bar{m}_{x_0}}{\bar{C}_n^\alpha \Delta z} - \frac{\varepsilon_T d_T}{\bar{C}_n^\alpha \Delta z} \frac{P_T}{J_x} \sin(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (6)$$

где

$$C_{11} = \frac{\bar{P}_T}{\omega_{\text{кр}}} \cos \varphi_1; \quad C_{12} = \frac{\bar{m}_z^\omega}{\bar{m}_z^\alpha} \bar{P}_T \cos \varphi_1 = -C_{22}; \quad C_{13} = \frac{P_T}{\bar{m}_z^\alpha} \frac{x_T}{J} \sin \varphi_1;$$

$$C_{21} = \frac{\bar{P}_T}{\omega_{\text{кр}}} \sin \varphi_1; \quad C_{23} = \frac{P_T}{\bar{m}_z^\alpha} \frac{x_T}{J} \cos \varphi_1; \quad K_{12} = \frac{P_T}{\bar{m}_z^\alpha} \sin \varphi_2;$$

$$K_{11} = C_{11} \lambda + C_{12} + C_{13}; \quad K_{21} = C_{21} \lambda + C_{22} + C_{23}; \quad K_{22} = \frac{P_T}{\bar{m}_z^\alpha} \cos \varphi_2.$$

Особые точки $(\lambda_*, \alpha_*, \beta_*)$ системы уравнений (2) можно определить, решая совместно уравнения (4), (5) и (6). Рассмотрим качественную картину изменения угла атаки в пространстве $\alpha - \lambda$ для случая наличия заданных возмущений β_0 . В соответствии с уравнениями (5) и (6) при $\lambda = 0$ имеем следующие значения угла атаки:

$$\Phi_1(\lambda) \Big|_{\lambda=0} = \alpha \Big|_{\lambda=0} = \frac{\varepsilon_T (C_{22} + C_{23}) + d_T K_{22}}{(1 + \Delta\lambda_1)} \equiv \Phi_1(\lambda)_0; \quad (7)$$

$$\Phi_2(\lambda) \Big|_{\lambda=0} = \alpha \Big|_{\lambda=0} = -\frac{\bar{m}_{x_0}}{\bar{C}_n^\alpha \Delta z} - \varepsilon_T d_T \frac{P_T \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{J_x \bar{C}_n^\alpha \Delta z} \equiv \Phi_2(\lambda)_0. \quad (8)$$

Из уравнений (7) и (8) очевидно, что $\Phi_1(\lambda)_0$ зависит только от возмущающих факторов эксцентриситета силы тяги ε_T и d_T , а функция $\Phi_2(\lambda)_0$ зависит от произведения $\varepsilon_T d_T$ и возмущающего фактора Δz .

Угол наклона прямой $\Phi_2(\lambda)$ в плоскости $\alpha - \lambda$ с учетом формулы (6) определяется следующим соотношением:

$$\frac{d}{d\lambda} [\Phi_2(\lambda)] = \frac{\bar{m}_x^\omega \omega_{\text{кр}}}{\bar{C}_n^\alpha \Delta z}. \quad (9)$$

Значение величины λ , при котором прямая $\Phi_2(\lambda)$ пересекает ось абсцисс в плоскости $\alpha - \lambda$, определяется при $\alpha = 0$ из уравнения (6) как

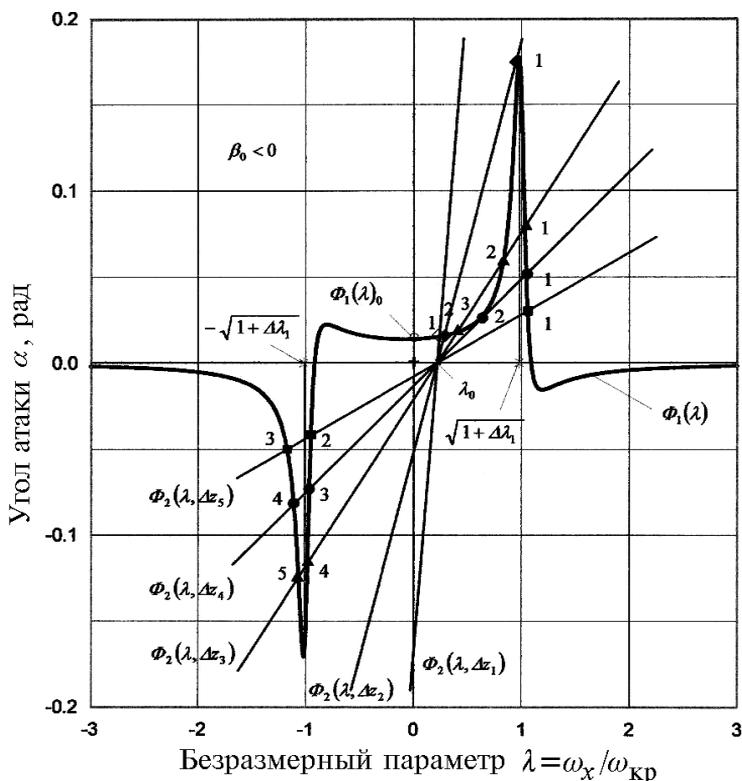
$$\lambda_0 = \frac{1}{\bar{m}_x^\omega \omega_{\text{кр}}} \left[\bar{m}_{x_0} + \varepsilon_T d_T \frac{P_T}{J_x} \sin(\varphi_1 - \varphi_2) \right]. \quad (10)$$

Отметим, что значение λ_0 не зависит от возмущающего фактора β_0 или Δz , но в соответствии с выражением (10) зависит от произведения возмущающих факторов $\varepsilon_T d_T$. Таким образом все прямые $\Phi_2(\lambda)$ для разных Δz будут пересекаться в одной точке (рисунок).

Точки пересечения прямой $\Phi_2(\lambda)$ с кривой $\Phi_1(\lambda)$ соответствуют особым точкам решения системы уравнений (2) на фазовой плоскости, каждая из которых определяет величину угла атаки в режимах резонансной авторотации. Очевидно, чем ближе к вершине резонансного пика находится точка пересечения, тем большие углы атаки будут наблюдаться при резонансе.

Проанализируем семейство прямых $\Phi_2(\lambda)$ для случая $\beta_0 < 0$, обусловленных фиксированным значением аэродинамической асимметрии β_a и различными положительными значениями величин бокового смещения центра масс ЛА Δz .

В соответствии с формулой (9) имеем, что при $\Delta z_3 > \Delta z_2$ угол наклона прямой $\Phi_2(\lambda, \Delta z_3)$ будет меньше, чем угол наклона прямой $\Phi_2(\lambda, \Delta z_2)$. Это может привести к следующему. Для параметра Δz_2 в



Графики изменения угла атаки α в функции λ для конкретного ЛА при $\beta_0 < 0$, $\varepsilon_T = \text{const}$, $d_T = \text{const}$ для различных величин бокового смещения центра масс ЛА ($\Delta z_1 < \Delta z_2 < \Delta z_3 < \Delta z_4 < \Delta z_5$)

установившемся режиме движения ЛА имеют место два корня уравнения и, соответственно, в структуре фазовой плоскости — две особые точки. При изменении параметра Δz от величины Δz_2 до величины Δz_3 возникает иная структура фазового пространства (см. рисунок), в котором имеют место пять особых точек. Таким образом, при небольшом случайном изменении величины параметра Δz не только получаются различные величины угла атаки в режиме авторотации, но и возникают различные случаи особых точек. На этом же рисунке показаны прямые, касающиеся резонансного пика $\Phi_2(\lambda, \Delta z_2)$, и $\Phi_2(\lambda, \Delta z_4)$ — касательная кривой $\Phi_1(\lambda)$.

Величины Δz_2 и Δz_4 являются бифуркационными значениями параметра Δz , лежащего в пределах ($\Delta z_2 < \Delta z < \Delta z_4$). Например, малое уменьшение величины Δz от значения Δz_2 резко изменяет картину влияния бокового отклонения центра масс ЛА на угловое движение ЛА, которое будет проходить с небольшим углом атаки.

Наличие эксцентриситетов силы тяги, в свою очередь, изменяет положение особых точек: происходит смещение точки пересечения прямой $\Phi_2(\lambda)$ с осью абсцисс и изменение величины угла атаки при $\lambda = 0$, соответствующей формуле (7).

В процессе проектирования ЛА применение методов качественной теории систем дает возможность оценить предельные величины малых асимметрий, при которых не возникает резонансных режимов, вызывающих угловое движение аппарата с большим значением угла атаки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К а з а к о в ц е в В. П. Аналитический метод оценки влияния малых массово-конструктивных асимметрий на динамику углового движения СА // Оборонная техника. — 1997. — № 9–10. — С. 57–59.
2. Ш и л о в А. А., Г о м а н М. Г. Резонансные режимы пространственного неуправляемого движения аппаратов на участке входа в атмосферу // Тр. ЦАГИ. — 1975. — Вып. 1624. — 44 с.
3. Ш и л о в А. А. Влияние массовой и аэродинамической несимметрии тела на характер его пространственного движения // Сб. докл. АН СССР. — 1968. — Т. 183, № 5. — С. 1028–1031.

Статья поступила в редакцию 1.06.2005



Ахмад Баракат Альахмад родился в 1965г. В 1989г. окончил военно-инженерную академию им. Х.Альсада по специальности “Самолеты–двигатели” (г.Халеб, Сирия) со степенью “бакалавра” и Высшую школу авиации в 1993 г. В 1997 г. окончил МГТУ им. Н.Э.Баумана по специальности “Баллистика и Аэродинамика” с магистерской степенью. В настоящее время работает в ЦНИИ (Сирия). Автор ряда научных работ в области баллистики и динамики полета летательных аппаратов.