

Al Ahmad Ahmad Barakat (b. 1965) graduated from the Military and Engineering Academy n.a. H. Al Asad (city Haleb, Syria) and Higher School for Aviation in 1993 and the Bauman Moscow State Technical University in 1997. Researcher of the Central Scientific and Research Institute (Syria). Author of some publications in the field of ballistics and flight dynamics of flying vehicles.

УДК 536.2

А. В. А т т е т к о в, Н. С. Б е л я к о в,
И. К. В о л к о в

**ВЛИЯНИЕ ПОДВИЖНОСТИ ГРАНИЦЫ
НА ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА
С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ КАНАЛОМ
В НЕСТАЦИОНАРНЫХ УСЛОВИЯХ
ТЕПЛООБМЕНА С ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ**

Исследовано влияние подвижности границы на температурное поле твердого изотропного тела. Рассмотрен случай движения границы по заданному закону со скоростью, являющейся малым положительным параметром. Разработан приближенный аналитический метод решения соответствующей обобщенной краевой задачи нестационарной теплопроводности.

Решение многих практически важных задач связано с необходимостью математического моделирования процессов теплопереноса в твердых телах при нестационарных режимах теплообмена с внешней средой, обусловленных временным изменением коэффициента теплоотдачи [1–5]. Трудности, возникающие при решении подобных задач, хорошо известны [1]. Они усугубляются в тех случаях, когда необходимо учитывать влияние разного рода механических или физико-химических процессов на температурное поле твердого тела, неизбежно приводящих к изменению размеров тела вследствие временного изменения положения его границ.

Среди задач нестационарной теплопроводности в твердых телах с движущимися границами, часто называемых обобщенными краевыми задачами [1], особое место занимают задачи, связанные с исследованием температурных полей в твердых телах с границами, движущимися по заданному закону [1, 6–8].

Основная цель проведенных исследований — изучение особенностей процесса формирования температурного поля в неограниченном

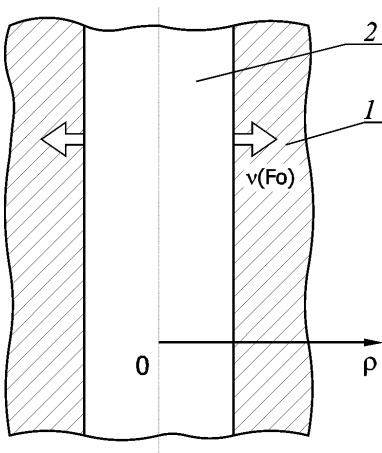


Рис. 1. Используемая расчетная схема:

1 — твердое тело, 2 — внешняя среда

при исходной математической модели исследуемого процесса имеет вид

$$\frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \right]; \quad Fo > 0, \quad \rho > \nu(Fo) > 1,$$

$$\Theta(\rho, Fo)|_{Fo=0} = 0, \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial \Theta(\rho, Fo)}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\nu(Fo)} = Bi(Fo) \left[\Theta(\rho, Fo)|_{\rho=\nu(Fo)} - \zeta(Fo) \right],$$

$$\Theta(\rho, Fo)|_{Fo>0} \in L^2[\nu(Fo), +\infty),$$

где последнее условие означает, что при каждом фиксированном $Fo > 0$ функция $\Theta(\rho, Fo)$ интегрируема с квадратом по пространственной переменной $\rho \in [\nu(Fo), +\infty)$;

$$\rho = \frac{r}{r_0}, \quad Fo = \frac{at}{r_0^2}, \quad \Theta = \frac{T - T_0}{T_{c0} - T_0}, \quad \zeta = \frac{T_c - T_0}{T_{c0} - T_0}, \quad Bi = \frac{\alpha}{\lambda} r_0, \quad (3)$$

r — радиальная координата; t — время; T — температура; λ — коэффициент теплопроводности; a — коэффициент температуропроводности; α — коэффициент теплоотдачи; индекс “с” относится к внешней среде, индекс “0” — к начальным значениям величин.

Далее предположим, что функции $Bi = Bi(Fo)$ и $\zeta = \zeta(Fo)$, содержащиеся в математической модели (1), (2) и определенные равенствами (3), удовлетворяют стандартным требованиям теоремы существования и единственности решения рассматриваемой задачи [9]. Переходя к подвижной системе координат

$$X = \rho/\nu(Fo), \quad \tau = Fo, \quad (4)$$

твердом изотропном теле с цилиндрическим каналом (рис. 1), заполненным высокотемпературным газом (в дальнейшем — внешней средой), граница которого движется по заданному закону

$$\nu(Fo) = 1 + \varepsilon Fo, \quad (1)$$

где ε — малый положительный параметр. При этом предполагается, что процесс теплообмена с внешней средой сопровождается временным изменением коэффициента теплоотдачи на подвижной границе цилиндрического канала, т. е. является нестационарным.

Постановка задачи. В соответствии с поставленной целью и с учетом допу-

преобразуем исходную математическую модель (1), (2) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \mu(\tau) \frac{\partial \Theta(X, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{1}{X} \frac{\partial}{\partial X} \left[X \frac{\partial \Theta(X, \tau)}{\partial X} \right] + \frac{\dot{\mu}(\tau)}{2} X \frac{\partial \Theta(X, \tau)}{\partial X}; \quad \tau > 0, \quad X > 1, \\ \Theta(X, \tau) \Big|_{\tau=0} &= 0, \\ \frac{\partial \Theta(X, \tau)}{\partial X} \Big|_{X=1} &= \text{Bi}(\tau) [\Theta(X, \tau) \Big|_{X=1} - \zeta(\tau)], \\ \Theta(X, \tau) \Big|_{\tau > 0} &\in L^2[1, +\infty), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\mu(\tau) = \nu^2(\tau) \equiv (1 + \varepsilon\tau)^2, \quad \dot{\mu}(\tau) = 2\nu(\tau)\dot{\nu}(\tau) \equiv 2\varepsilon(1 + \varepsilon\tau). \quad (6)$$

Необходимо подчеркнуть, что решение задачи (5) связано с преодолением трудностей принципиального характера. Они, в основном, обусловлены функциональной зависимостью $\text{Bi} = \text{Bi}(\tau)$, т. е. нестационарностью реализуемого режима теплообмена. Аналитический метод решения рассматриваемой задачи (5), (6) известен лишь для ее частной постановки ($\varepsilon = 0$) и предложен в работе [3]. В основе метода лежит идея расщепления ядра сингулярного интегрального преобразования по пространственной переменной, являющегося обобщением известного интегрального преобразования Вебера [10, 11].

Температурное поле. С учетом сделанных предположений решение рассматриваемой задачи (5), (6) представим в виде разложения по малому параметру ε :

$$\Theta(X, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(X, \tau) \varepsilon^k. \quad (7)$$

В этом случае для каждого $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ функция $u_k(X, \tau)$ удовлетворяет следующей задаче:

$$\begin{aligned} \mu(\tau) \frac{\partial u_k(X, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{1}{X} \frac{\partial}{\partial X} \left[X \frac{\partial u_k(X, \tau)}{\partial X} \right] + \begin{cases} 0; & k = 0, \\ f_k(X, \tau), & k \geq 1, \end{cases} \\ &\quad \tau > 0, \quad X > 1, \\ u_k(X, \tau) \Big|_{\tau=0} &= 0, \\ \frac{\partial u_k(X, \tau)}{\partial X} \Big|_{X=1} &= \text{Bi}(\tau) u_k(X, \tau) \Big|_{X=1} + \begin{cases} -\text{Bi}(\tau) \zeta(\tau); & k = 0, \\ 0; & k \geq 1, \end{cases} \\ u_k(X, \tau) \Big|_{\tau > 0} &\in L^2[1, +\infty), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$f_k(X, \tau) = \sqrt{\mu(\tau)} X \frac{\partial u_{k-1}(X, \tau)}{\partial X}; \quad k \geq 1. \quad (9)$$

Для решения задач (8), (9) воспользуемся обобщенным интегральным преобразованием Вебера по пространственной переменной X [3]:

$$v_k(p, \tau) = V[u_k(X, \tau)] \equiv \int_1^{\infty} u_k(X, \tau) K(X, p, \tau) X dX; \quad k \geq 0,$$

$$u_k(X, \tau) = V^{-1}[v_k(p, \tau)] \equiv \int_0^{\infty} v_k(p, \tau) \frac{K(X, p, \tau)}{\alpha^2(p, \tau) + \beta^2(p, \tau)} p dp, \quad (10)$$

где

$$K(X, p, \tau) = \alpha(p, \tau) J_0(pX) - \beta(p, \tau) Y_0(pX),$$

$$\alpha(p, \tau) = \text{Bi}(\tau) Y_0(p) + p Y_1(p),$$

$$\beta(p, \tau) = \text{Bi}(\tau) J_0(p) + p J_1(p),$$

$J_\nu(\cdot)$ и $Y_\nu(\cdot)$ — функции Бесселя индекса ν первого и второго рода соответственно. Важно заметить, что непосредственное применение сингулярного интегрального преобразования (10) для нахождения решений задачи (8), (9) не представляется возможным, поскольку ядро $K(X, p, \tau)$ этого интегрального преобразования зависит не только от пространственной переменной X и параметра интегрального преобразования p , но и от временной переменной τ . Это, в частности, приводит к тому, что

$$V \left[\frac{\partial u_k(X, \tau)}{\partial \tau} \right] \neq \frac{\partial v_k(p, \tau)}{\partial \tau}; \quad k \geq 0.$$

Нулевое приближение $u_0(X, \tau)$ для функции (7) является решением задачи (8), (9) при $k = 0$. Для его нахождения воспользуемся известным приемом [12]. Вводя обозначения

$$A_0(p, \tau) = \int_1^{\infty} u_0(X, \tau) H_0^{(1)}(pX) X dX,$$

$$\omega(p, \tau) = \alpha(p, \tau) + i\beta(p, \tau), \quad (11)$$

где $H_0^{(1)}(\cdot)$ — функция Ганкеля первого рода нулевого порядка, а функции $\alpha(p, \tau)$ и $\beta(p, \tau)$ определены в равенстве (10), представим изображение $v_0(p, \tau)$ оригинала $u_0(X, \tau)$ в виде

$$v_0(p, \tau) = \text{Re} \{ \omega(p, \tau) A_0(p, \tau) \}. \quad (12)$$

При этом справедливы тождества

$$\begin{aligned}
 V \left[\frac{\partial u_0(X, \tau)}{\partial \tau} \right] &\equiv \operatorname{Re} \left\{ \omega(p, \tau) \frac{dA_0(p, \tau)}{d\tau} \right\}, \\
 V \left[\frac{1}{X} \frac{\partial}{\partial X} \left(X \frac{\partial u_0(X, \tau)}{\partial X} \right) \right] &\equiv -p^2 v_0(p, \tau) - \frac{2}{\pi} \operatorname{Bi}(\tau) \zeta(\tau) = \\
 &= -p^2 \operatorname{Re} \{ \omega(p, \tau) A_0(p, \tau) \} - \frac{2}{\pi} \operatorname{Bi}(\tau) \zeta(\tau).
 \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, согласно равенствам (10)–(12), решение задачи (8), (9) при $k = 0$ найдено, если известна функция $A_0(p, \tau)$. В свою очередь, согласно равенствам (8), (9) и (10)–(13) эта функция является решением задачи Коши

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \left\{ \omega(p, \tau) \left[\mu(\tau) \frac{dA_0(p, \tau)}{d\tau} + p^2 A_0(p, \tau) \right] \right\} &= -\frac{2}{\pi} \operatorname{Bi}(\tau) \zeta(\tau); \quad \tau > 0, \\
 A_0(p, 0) &= 0.
 \end{aligned} \quad (14)$$

В соответствии с исходными допущениями существует единственное решение $u_0(X, \tau)$ задачи (8), (9) при $k = 0$ и, как следствие, согласно равенствам (10), (11) существует единственная функция $v_0(p, \tau)$ — изображение сингулярного интегрального преобразования (10) этого решения. Поэтому из равенства (12) следует, что любое решение $A_0(p, \tau)$ задачи (13) позволяет найти искомое изображение $v_0(p, \tau)$. Из вещественности функций $\operatorname{Bi}(\tau)$ и $\zeta(\tau)$ следует, что задача Коши

$$\begin{aligned}
 \omega(p, \tau) \left[\mu(\tau) \frac{dA_0(p, \tau)}{d\tau} + p^2 A_0(p, \tau) \right] &= -\frac{2}{\pi} \operatorname{Bi}(\tau) \zeta(\tau); \quad \tau > 0, \\
 A_0(p, 0) &= 0
 \end{aligned} \quad (15)$$

является частным случаем задачи Коши (14) и, как следствие, любое ее решение — это решение задачи Коши (14).

Решение задачи Коши (15) может быть найдено стандартными методами [13]:

$$A_0(p, \tau) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\tau \frac{\operatorname{Bi}(y) \zeta(y)}{\nu^2(y)} \frac{\overline{\omega(p, y)}}{|\omega(p, y)|^2} \exp \left\{ -\frac{p^2(\tau - y)}{\nu(\tau)\nu(y)} \right\} dy; \quad \tau \geq 0,$$

где

$$\begin{aligned}
 \overline{\omega(p, y)} &= \alpha(p, y) - i\beta(p, y), \\
 |\omega(p, y)|^2 &= \alpha^2(p, y) + \beta^2(p, y).
 \end{aligned}$$

Используя это решение и учитывая равенства (11), (12), запишем решение задачи (8), (9) при $k = 0$ в изображениях сингулярного интегрального преобразования (10):

$$v_0(p, \tau) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\tau \frac{\alpha(p, \tau)\alpha(p, y) + \beta(p, \tau)\beta(p, y)}{\alpha^2(p, y) + \beta^2(p, y)} \times \\ \times \frac{\text{Bi}(y)\zeta(y)}{\nu^2(y)} \exp \left\{ -\frac{p^2(\tau - y)}{\nu(\tau)\nu(y)} \right\} dy; \quad \tau \geq 0. \quad (16)$$

Аналитически замкнутая форма представления функции $u_0(X, \tau)$ следует из равенства (16), если воспользоваться формулой обращения интегрального преобразования (10):

$$u_0(X, \tau) = V^{-1}[v_0(p, \tau)]; \quad \tau \geq 0, \quad X \geq 1, \quad (17)$$

где при любом фиксированном $\tau \geq 0$ равенство понимается в смысле стандартной нормы пространства $L^2[1, +\infty)$. Заметим, что при $\varepsilon = 0$ ($\nu(\tau) \equiv 1$) полученное решение для функции $u_0(X, \tau)$ преобразуется к известному [3] и определяет температурное поле неограниченного твердого тела с цилиндрическим каналом единичного радиуса при заданном режиме нестационарного теплообмена с внешней средой. Последний однозначно устанавливается конкретизацией вида функции $\text{Bi}(\tau)$.

Сингулярное интегральное преобразование (10), применяемое по пространственной переменной X , с последующим расщеплением его ядра, позволяет найти функции $u_k(X, \tau)$ при $k \geq 1$ в аналитически замкнутом виде, т. е. определить искомого решение (7) с любой наперед заданной степенью точности. При этом для любого $k \geq 1$

$$u_k(X, \tau) = \int_0^\infty v_k(p, \tau) \frac{K(X, p, \tau)}{\alpha^2(p, \tau) + \beta^2(p, \tau)} p dp; \quad \tau \geq 0, \quad X \geq 1, \quad (18)$$

где

$$v_k(p, \tau) = \int_0^\tau \frac{\alpha(p, \tau)\alpha(p, y) + \beta(p, \tau)\beta(p, y)}{\alpha^2(p, y) + \beta^2(p, y)} \times \\ \times \frac{\Psi_k(p, y)}{\nu^2(y)} \exp \left\{ -\frac{p^2(\tau - y)}{\nu(\tau)\nu(y)} \right\} dy, \\ \Psi_k(p, \tau) = V[f_k(X, \tau)] \equiv \int_1^\infty f_k(X, \tau) H_0^{(1)}(pX) X dX,$$

ядро $K(X, p, \tau)$ сингулярного интегрального преобразования определено в равенстве (10), а функции $f_k(X, \tau)$ задаются равенствами (9).

Анализ результатов. Воспользуемся полученными результатами для исследования влияния условий теплообмена с внешней средой и подвижности границы цилиндрического канала на формируемое в твердом теле температурное поле. Ограничимся нахождением приближенного решения с точностью $o(\varepsilon)$, т. е. полагаем

$$\Theta(X, \tau) = u_0(X, \tau) + \varepsilon u_1(X, \tau), \quad (19)$$

где $o(\varepsilon)$ — величина более высокого порядка малости по отношению к ε , а функции $u_0(X, \tau)$ и $u_1(X, \tau)$ определены равенствами (16), (17) и (18) при $k = 1$ соответственно.

На рис. 2 частично приведены результаты расчетов временной зависимости безразмерной температуры $\Theta(1, \tau)$ неподвижной ($\varepsilon = 0$) границы цилиндрического канала, устанавливающие характерные особенности процесса формирования температурного поля в твердом теле при реализации различных режимов теплообмена с внешней средой: теплообмен по закону Ньютона

$$\text{Bi}(\tau) \equiv H_1 - \text{const},$$

импульсные режимы теплообмена

$$\text{Bi}(\tau) = \begin{cases} H_1; & 0 \leq \tau \leq \tau_*, \\ H_2; & \tau > \tau_*, \end{cases} \quad (20)$$

где $H_1 > 0$, $H_2 \geq 0$ — постоянные, при $\zeta(\tau) = 1$. Расчет проведен при $H_1 = 1$ и $\tau_* = 1$. Важно отметить, что в масштабе рис. 2 графики функций $\Theta(1, \tau)$, полученные с использованием равенств (16), (17) и путем численного решения задачи (5), (6) при $\varepsilon \equiv 0$, совпадают. При численном решении задачи использована неявная симметричная конечно-разностная схема (схема Кранка–Николсона), имеющая второй порядок аппроксимации как по времени, так и по пространственной переменной [14].

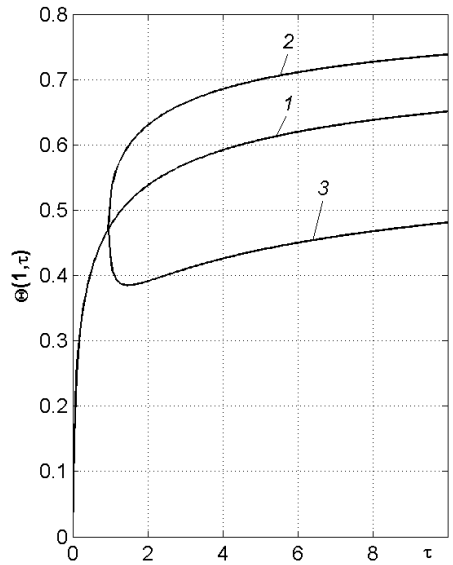


Рис. 2. Временная зависимость температуры границы цилиндрического канала в различных режимах теплообмена с внешней средой: $H_1/H_2 = 1$ (1); 1,5 (2); 0,5 (3)

Физическая реализация импульсных режимов теплообмена, ассоциируемая, например, с деструкцией поверхностных слоев твердого тела при его высокотемпературном нагреве внешней средой, может приводить как к улучшению условий теплообмена при $\tau > \tau_*$ и интенсификации процесса нагрева (см. рис. 2, кривая 2) по сравнению с режимом теплообмена по закону Ньютона (см. рис. 2, кривая 1), так и их ухудшению (см. рис. 2, кривая 3). В последнем случае температурный профиль $\Theta(1, \tau)$ имеет характерную зону релаксации при $\tau > \tau_*$, длительность которой зависит как от величины H_2 в законе теплообмена (20), так и от длительности τ_* первой фазы импульсного теплообмена. Уменьшение H_2 приводит к увеличению протяженности зоны релаксации и глубины спада температуры в этой зоне. Отметим также, что в рассматриваемом режиме теплообмена от длительности τ_* первой фазы теплообмена и соотношения интенсивностей теплообмена H_1 и H_2 в законе (20) зависит и величина предельно достижимого (при $\tau \rightarrow +\infty$) разогрева.

Проанализируем теперь, как влияет подвижность границы цилиндрического канала на формируемое в твердом теле температурное поле. При этом будем предполагать, что теплообмен с внешней средой происходит по закону Ньютона ($Bi(\tau) \equiv H_1 - \text{const}$), а температура последней постоянна ($\zeta(\tau) \equiv 1$). Следует подчеркнуть, что рассматриваемый режим теплообмена наиболее важен при тестировании получаемых результатов, поскольку приводит к наиболее простым представлениям решения задачи (5), (6). Нулевое приближение $u_0(X, \tau)$ для функции (19) в этом случае принимает вид

$$u_0(X, \tau) = -\frac{2H_1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_0^\tau \exp \left\{ -\frac{p^2(\tau - y)}{\nu(\tau)\nu(y)} \right\} \frac{dy}{\nu^2(y)} \right] \times \\ \times \frac{\alpha(p)J_0(pX) - \beta(p)Y_0(pX)}{\alpha^2(p) + \beta^2(p)} p dp; \quad \tau \geq 0, \quad X \geq 1, \quad (21)$$

где

$$\alpha(p) = H_1 Y_0(p) + p Y_1(p), \\ \beta(p) = H_1 J_0(p) + p J_1(p),$$

а первое приближение $u_1(X, \tau)$ — определяется из выражения (18) при $k = 1$. При $\varepsilon = 0$ равенство (21) преобразуется к виду [3] и определяет температурное поле твердого изотропного тела с цилиндрическим каналом, граница которого неподвижна ($\nu(\tau) \equiv 1$).

На рис. 3 приведены результаты численных расчетов безразмерной температуры $\Theta(1, \tau)$ границы цилиндрического канала при различных

значениях параметра ε : 0 (кривая 1), 0,01 (кривая 2) и 0,1 (кривая 3), а также временные зависимости $u_0(1, \tau)$ и $u_0(1, \tau) + \varepsilon u_1(1, \tau)$ для функций, определяющих приближенное решение (19), при $\varepsilon = 0,01$ (кривые 2, 4) и 0,1 (кривые 2, 5). Важно отметить, что при $\varepsilon = 0,01$ графики функции $\Theta(1, \tau)$, полученные численным расчетом и с использованием приближенного аналитического решения (19), в масштабе рис. 3 совпадают. В то же время, при $\varepsilon = 0,1$ как нулевое приближение $u_0(1, \tau)$ решения (19) (кривая 4), так и приближенное решение с точностью $o(\varepsilon)$ (кривая 5) приводят к завышенным значениям безразмерной температуры $\Theta(1, \tau)$ по сравнению с результатами численного расчета (кривая 3).

Обобщая результаты проведенных исследований, необходимо отметить, что подвижность границы цилиндрического канала приводит к снижению температуры поверхности изотропного твердого тела, причем снижение тем больше, чем выше скорость равномерного движения границы. С увеличением интенсивности теплоотдачи на подвижной границе цилиндрического канала температура поверхности твердого тела также снижается.

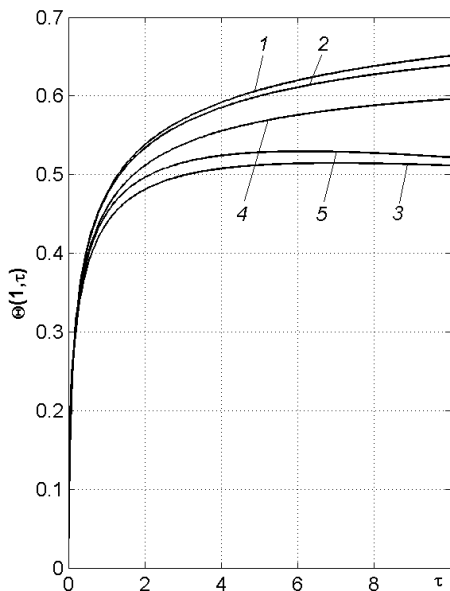


Рис. 3. Временная зависимость температуры подвижной границы цилиндрического канала в режиме теплообмена с внешней средой по закону Ньютона при различных значениях параметра ε :

$\varepsilon = 0$ (1); 0,01 (2); 0,1 (3–5)

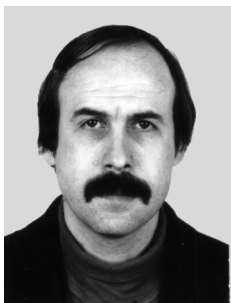
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К а р т а ш о в Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 2001. – 550 с.
2. Д и м и т р и е н к о Ю. И. Механика композиционных материалов при высоких температурах. – М.: Машиностроение, 1997. – 368 с.
3. А т т е т к о в А. В., В о л к о в И. К. Формирование температурных полей в области, ограниченной внутри цилиндрической полостью // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия “Машиностроение”. – 1999. – № 1. – С. 49–56.
4. К у д и н о в В. А. Аналитические методы решения краевых задач для многослойных конструкций: Обзор // Изв. РАН. Энергетика. – 1999. – № 5. – С. 86–106.
5. А т т е т к о в А. В., В л а с о в П. А., В о л к о в И. К. Температурное поле полупространства с термически тонким покрытием в импульсных режимах теплообмена с внешней средой // Инженерно-физический журнал. – 2001. – Т. 74, № 3. – С. 81–86.

6. Карташов Э. М. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами // Изв. РАН. Энергетика. – 1999. – № 5. – С. 3–34.
7. Аттетков А. В., Волков И. К. Математическое моделирование процессов теплопереноса в области с движущейся границей в условиях нестационарного теплообмена с внешней средой // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия “Естественные науки”. – 1999. – № 1. – С. 37–45.
8. Аттетков А. В., Власов П. А., Волков И. К. Влияние подвижности границы на температурное поле полупространства в нестационарных условиях теплообмена с внешней средой // Инженерно-физический журнал. – 2002. – Т. 75, № 6. – С. 172–178.
9. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралъцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
10. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 448 с.
11. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.
12. Аттетков А. В., Волков И. К. Аналитический метод решения задачи нестационарной теплопроводности для тела с двухслойным цилиндрическим каналом // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия “Машиностроение”. – 2001. – № 1. – С. 3–14.
13. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1964. – 272 с.
14. Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л. Численные методы. – М.: Физматлит, 2004. – 400 с.

Статья поступила в редакцию 21.11.2005

Александр Владимирович Аттетков родился в 1955 г., окончил МВТУ им. Н.Э.Баумана в 1979 г. Канд. техн. наук, старший научный сотрудник, доцент кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э.Баумана. Автор около 100 научных работ в области физики горения и взрыва, химической физики и математического моделирования.



A.V. Attetkov (b.1955) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1979. PhD(Eng), senior researcher, ass. professor of “Applied Mathematics” Department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of about than 100 publications in the field of physics of combustion and explosion, chemical physics and mathematical simulation.

Игорь Куприянович Волков родился в 1946 г., окончил Казанский государственный университет в 1970 г. Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры “Математическое моделирование” МГТУ им. Н.Э.Баумана. Автор более 100 научных работ в области математической физики, математического моделирования и математической генетики.



I.K. Volkov (b.1946) graduated from Kazan State University in 1970. DSc(Phys.-Math.), professor of “Mathematical Simulation” Department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 100 publications in the field of mathematical physics, mathematical simulation, and mathematical genetics.