УДК 533.6.011

А. И. Пастухов, Е. К. Галемин

К РАСЧЕТУ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОНКИХ КРЫЛЬЕВ С ПОСТОЯННОЙ ПО РАЗМАХУ СТРЕЛОВИДНОСТЬЮ В НЕСЖИМАЕМОМ ПОТОКЕ ВБЛИЗИ ЭКРАНА

Рассмотрено применение метода непрерывной вихревой поверхности к расчету аэродинамических характеристик крыльев около экрана.

Известные работы, связанные с расчетами аэродинамических характеристик крыльев около экрана, базируются, в основном, на методе дискретных вихрей [1]. Недостаточное теоретическое обоснование этого метода, а также сомнения в правильности подхода, согласно которому свободные вихри, сходящие с кромок панелей отображенного крыла, индуцируют скорости "сквозь" его непроницаемую поверхность, обусловливают попытку использовать для решения вопроса метод непрерывной вихревой поверхности.

Основные допущения. Задача о движении крыла около экранирующей поверхности имеет непосредственное отношение к практическим проблемам взлетно-посадочных режимов самолетов и полета экранопланов. При движении крыла на малых расстояниях от экранирующей поверхности (земля, водная поверхность) его аэродинамические характеристики существенно отличаются от их значений в безграничном потоке. Опыт показывает, что зависимости коэффициентов подъемной силы и продольного момента от угла атаки становятся существенно нелинейными даже у крыльев, имеющих большие относительные удлинения.

Эффект влияния близости экранирующей поверхности к реальному крылу, как известно, можно воспроизвести крылом, зеркально отображенным относительно экрана. Увеличение нормальных к модели реального крыла скоростей набегающего потока за счет скоростей, индуцируемых вихревой моделью зеркально отображенного крыла, приводит согласно условию непроницаемости к увеличению интенсивностей вихрей модели реального крыла и к перераспределению вихревой плотности по размаху и хордам.

При рассмотрении этой задачи для крыла конечного удлинения индукции свободных вихрей "сквозь" плоскость отображенного крыла можно избежать, предположив, что все его свободные вихри лежат в плоскостях хорд. Это допущение не является очень грубым, так как полетные углы атаки экранопланов и самолетов на взлетно-посадочных режимах невелики, а следовательно, углы заклинивания свободных вихрей близки к нулевым значениям.

Тонкие крылья с симметричным профилем и с постоянной по размаху стреловидностью заменяются плоскими пластинами с непрерывными вихревыми поверхностями. Полуразмахи этих моделей крыльев разбиваются на n продольных панелей с номерами $i(k) = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, шириной $l/2n$, где l — размах крыла. Абсциссы x присоединенных вихрей отсчитываются в корневых сечениях реального I и отображенного II крыльев (рис. 1). Положение точки A на крыле I, в которой вычисляются скорости, вызванные собственными вихрями и вихревой моделью отображенного крыла, определяется абсциссой x' в корневом сечении и по размаху — рассто-

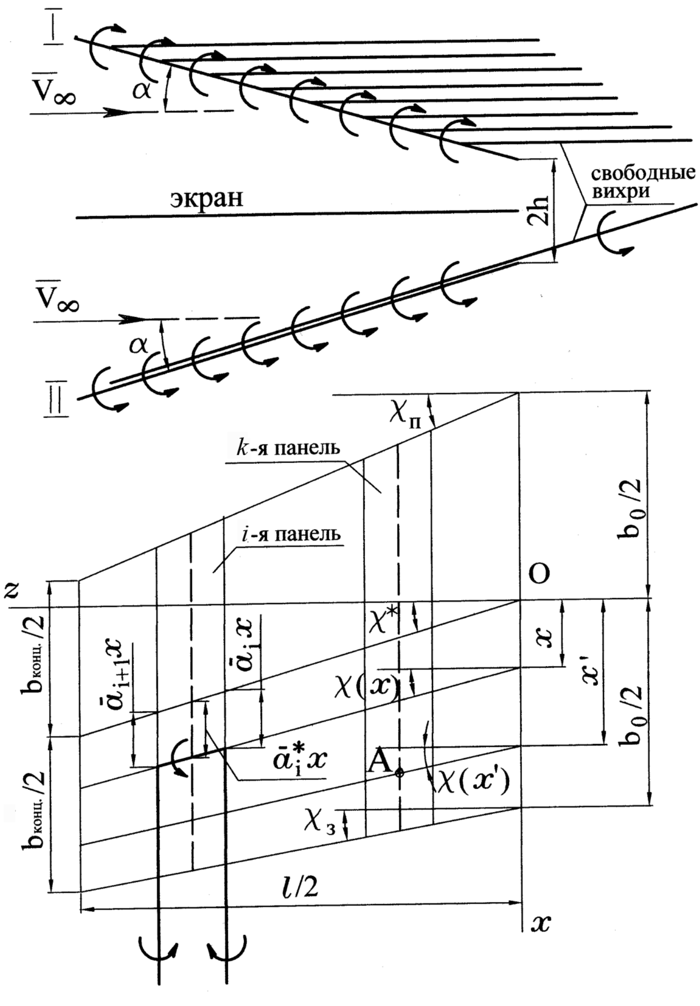

Рис. 1. Вихревая модель крыла. Схема отображения крыла вблизи экрана

янием от середины крыла до средней линии соответствующей панели: $z' = (k + 0{,}5)\,\dfrac{l}{2n}$.

В относительных координатах и величинах указанные параметры имеют вид

$$x = -\frac{b_0}{2}\cos\theta, \quad dx = \frac{b_0}{2}\sin\theta d\theta, \quad x' = -\frac{b_0}{2}\cos\theta', \quad dx' = \frac{b_0}{2}\sin\theta' d\theta',$$

$$\lambda^* = \frac{l}{b_0}, \quad \lambda_n^* = \frac{l}{b_0 n}, \quad \bar{z}' = (k + 0{,}5)\frac{l}{b_0 n} = (k + 0{,}5)\,\lambda_n^*,$$

где b_0 — длина корневой хорды.

Относительное обратное сужение по середине i-й панели обозначается $\bar{a}_i^*$, по концевому торцу панели — $\bar{a}_{i+1}$, по торцу, обращенному к среднему сечению крыла, — $\bar{a}_i$ (см. рис. 1):

$$\bar{a}_i^* = 1 - (i + 0{,}5)\lambda_n^* \operatorname{tg}\chi^{**}, \quad \bar{a}_{i+1} = 1 - (i + 1)\lambda_n^* \operatorname{tg}\chi^{**},$$

$$\bar{a}_i = (1 - 0{,}5)\lambda_n^* \operatorname{tg}\chi^{**}, \quad \operatorname{tg}\chi^{**} = 0{,}5(\operatorname{tg}\chi_{\text{п}} - \operatorname{tg}\chi_{\text{з}}),$$

$\chi_{\text{п}}$ и $\chi_{\text{з}}$ — углы стреловидности передней и задней кромок крыла соответственно.

Примем, что распределение вихревой плотности по модели отображенного крыла $\gamma_i\,(x, \alpha)$, интенсивности присоединенных и свободных вихрей, лежащих в плоскости хорд, как было указано выше, имеют те же значения, что и на модели реального крыла в свободном потоке.

Вычисление скоростей, вызванных присоединенными вихрями модели отображенного крыла. Полагая вихревую плотность величиной постоянной вдоль размаха i-й панели, а ее значение в корневом сечении крыла $\gamma_i\,(x, \alpha)$, интенсивность элементарного несущего вихря можно представить в виде $\gamma_i\,(x, \alpha, h)\,\bar{a}_i^* \cos\chi\,(x)\,dx$, где $\chi\,(x)$ — угол стреловидности несущего вихря с координатой x в корневом сечении.

В соответствии с формулой Био-Савара элементарную скорость, вызванную присоединенными вихрями i-х панелей обеих половин отображенного крыла, в точке А реального крыла, расположенной в среднем сечении k-й панели с координатой $x'\,(\theta')$ в корневом сечении крыла, можно найти в виде

$$dV_{\text{п}i,k} = \frac{\gamma_i \bar{a}_i^* \cos\chi dx}{4\pi}\left[\frac{1}{h''_{\text{п}k}}\left(\cos\varphi''_{2i,k} - \cos\varphi''_{1i,k}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{h'_{\text{п}k}}\left(\cos\varphi'_{2i,k} - \cos\varphi'_{1i,k}\right)\right], \quad (1)$$

где $h'_{\text{п}k}$ и $h''_{\text{п}k}$ — длины перпендикуляров, опущенных из точки A реального крыла на присоединенные вихри i-х панелей обеих половин отображенного крыла (рис. 2):

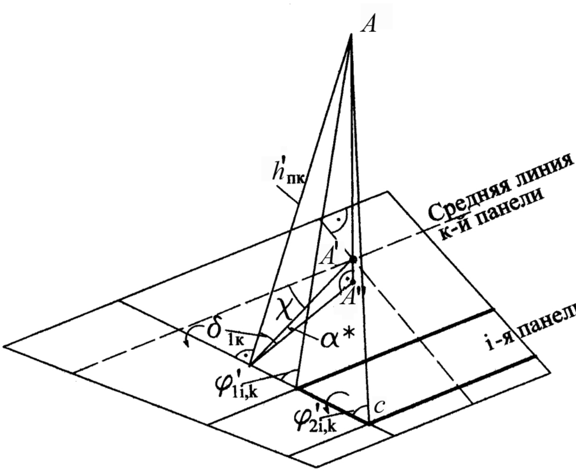

Рис. 2. Схема к вычислению скоростей, вызванных присоединенными вихрями модели отображенного крыла

в безразмерном виде

$$\bar{h}'_{\text{п}k} = \Big\{ \left[\bar{a}^*_k \left(\cos\theta - \cos\theta'\right) \cos\chi(\theta) \cos\alpha^*\left(\theta\right)\right]^2 + $$

$$+ \Big\{ 2\bar{h} + \left\{2\left[\lambda^* - \left(k + 0,5\right)\lambda^*_n\right] \operatorname{tg}\chi_{з} + 2\bar{a}^*_k \left(1 + \cos\theta'\right)\right\} \sin\alpha + $$

$$+ \bar{a}^*_k \left(\cos\theta - \cos\theta'\right) \cos\chi\left(\theta\right) \sin\alpha^*\left(\theta\right)\Big\}^2 \Big\}^{\frac{1}{2}};$$

$$\bar{h}''_{\text{п}k} = \Bigg\{ \bigg[\bar{a}^*_k (\cos\theta - \cos\theta') \cos\chi(\theta) \cos\alpha^*(\theta) + $$

$$+ 2(k + 0,5)\lambda^*_n \sin\chi(\theta) \cos\alpha^*(\theta) \bigg]^2 + $$

$$+ \Bigg\{ 2\bar{h} + \bigg\{ 2\bigg[\lambda^* - (k + 0,5)\lambda^*_n\bigg] \operatorname{tg}\chi_{з} + 2\bar{a}^*_k (1 + \cos\theta') \bigg\} \sin\alpha + $$

$$+ \bar{a}^*_k (\cos\theta - \cos\theta') \cos\chi(\theta) \sin\alpha^*(\theta) \Bigg\}^2 \Bigg\}^{\frac{1}{2}},$$

где α^* — угол атаки в плоскости, нормальной к несущему вихрю (см. рис. 2).

$$\cos\varphi'_{1i,k} = \frac{\bar{\rho}'_{i,k}}{\sqrt{\left(\bar{h}'_{\text{п},k}\right)^2 + \left(\bar{\rho}'_{i,k}\right)^2}}; \qquad \cos\varphi'_{2i,k} = \frac{\bar{\rho}'_{i+1,k}}{\sqrt{\left(\bar{h}'_{\text{п},k}\right)^2 + \left(\bar{\rho}'_{i+1,k}\right)^2}};$$

$$\cos\varphi''_{1i,k} = \frac{\bar{\rho}''_{i,k}}{\sqrt{\left(\bar{h}''_{\text{п},k}\right)^2 + \left(\bar{\rho}''_{i,k}\right)^2}}; \qquad \cos\varphi''_{2i,k} = \frac{\bar{\rho}''_{i+1,k}}{\sqrt{\left(\bar{h}''_{\text{п},k}\right)^2 + \left(\bar{\rho}''_{i+1,k}\right)^2}};$$

$$\bar{\rho}'_{i,k} = \frac{[i-(k+0{,}5)]\,\lambda_n^*}{\cos\chi(\theta)} - \bar{a}_k^*(\cos\theta-\cos\theta')\sin\chi(\theta)\,;$$

$$\bar{\rho}'_{i+1,k} = \frac{[i+1-(k+0{,}5)]\,\lambda_n^*}{\cos\chi(\theta)} - \bar{a}_k^*(\cos\theta-\cos\theta')\sin\chi(\theta)\,;$$

$$\rho''_{i,k} = \frac{[i+(k+0{,}5)]\,\lambda_n^*}{\cos\chi(\theta)} -$$

$$- \left[\bar{a}_k^*(\cos\theta-\cos\theta')\cos\chi(\theta) + 2(k+0{,}5)\,\lambda_n^*\sin\chi(\theta)\right]\operatorname{tg}\chi(\theta)\,;$$

$$\rho''_{i+1,k} = \frac{[i+1+(k+0{,}5)]\,\lambda_n^*}{\cos\chi(\theta)} -$$

$$- \left[\bar{a}_k^*(\cos\theta-\cos\theta')\cos\chi(\theta) + 2(k+0,5)\,\lambda_n^*\sin\chi(\theta)\right]\operatorname{tg}\chi(\theta)\,,$$

где $2\overline{h} = 2\dfrac{h}{b_0/2}$ — относительное расстояние по вертикали между концами торцовых хорд.

Проектируя скорость, вызванную элементарными присоединенными вихрями i-х панелей, на нормаль к поверхности реального крыла, получим (см. рис. 2)

$$dV^{(n)}_{\text{п}i,k} = dV_{\text{п}i,k}\sin(\delta - a^*)\,. \tag{2}$$

Интегрируя выражение (2) с учетом соотношения (1), получим нормальную к поверхности реального крыла безразмерную скорость, вызванную всеми присоединенными вихрями i-х панелей отображенного крыла в точке с координатой θ' среднего сечения k-й панели:

$$\overline{V}^{(n)}_{\text{п}i,k}\left(\alpha,\theta',\overline{h}\right) = \frac{\bar{a}_i^*}{2\pi}\int\limits_0^\pi \overline{\gamma}_i\left(\alpha,\theta,\overline{h}\right)\left\{\frac{\sin\left[\delta_{1k}(\theta,\theta',\alpha)-\alpha^*\right]}{2h'_{\text{п}k}\left(\alpha,\theta,\theta',\overline{h}\right)}\times\right.$$

$$\times\left[\cos\varphi'_{2i,k}\left(\theta,\theta',\alpha,\overline{h}\right) - \cos\varphi'_{1i,k}\left(\theta,\theta',\alpha,\overline{h}\right)\right] + \frac{\sin\left[\delta_{2k}(\theta,\theta',\alpha)-\alpha^*\right]}{2h''_{\text{п}k}\left(\alpha,\theta,\theta',\overline{h}\right)}\times$$

$$\left.\times\left[\cos\varphi''_{2i,k}\left(\theta,\theta',\alpha,\overline{h}\right) - \cos\varphi''_{1i,k}\left(\theta,\theta',\alpha,\overline{h}\right)\right]\right\}\cos\chi(\theta)\sin\theta d\theta \tag{3}$$

или

$$\overline{V}^{(n)}_{\text{п}i,k}\left(\alpha,\theta',\overline{h}\right) = \frac{\bar{a}_i^*}{2\pi}\int\limits_0^\pi \overline{\gamma}_i\left(\alpha,\theta,\overline{h}\right)\sigma^*_{i,k}\left(\alpha,\theta,\theta',\overline{h}\right)\cos\chi(\theta)\sin\theta d\theta,$$

где $\sigma^*_{i,k}$ определяется выражением, заключенным в фигурные скобки в формуле (3),

$$\delta_{1k} = \arcsin\left(\frac{\bar{a}_i^*\left(\cos\theta - \cos\theta'\right)\cos\chi\left(\theta\right)\cos\alpha^*}{\overline{h}'_{\text{п}k}}\right);$$

$$\delta_{2k} =$$

$$= \arcsin\left(\frac{\left[\bar{a}_i^*\left(\cos\theta - \cos\theta'\right)\cos\chi\left(\theta\right) + 2\left(k + 0{,}5\right)\lambda_n^* \sin\chi\left(\theta\right)\right]\cos\alpha^*}{\overline{h}''_{\text{п}k}}\right).$$

Суммируя по всем панелям отображенного крыла, можно получить

$$\overline{V}_{\text{п}k}^{(n)}\left(\alpha, \theta', \overline{h}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \overline{V}_{\text{п}i,k}^{(n)}\left(\alpha, \theta', \overline{h}\right).$$

Вычисление скоростей, вызванных свободными вихрями модели отображенного крыла. Для скорости, вызванной элементарными свободными вихрями, лежащими в плоскости отображенного крыла, сходящими с торцов i-х панелей, в точке A k-й панели реального крыла можно записать

$$d\bar{V}_{ci,k} = \frac{\gamma_i \bar{a}^* \cos\chi dx}{4\pi}\left(\frac{1 + \cos\delta'_{ci+1,k}}{\bar{h}'_{ci+1,k}} + \frac{1 + \cos\delta'_{ci,k}}{\bar{h}'_{ci,k}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1 + \cos\delta''_{ci+1,k}}{\bar{h}''_{ci+1,k}} + \frac{1 + \cos\delta''_{ci,k}}{\bar{h}''_{ci,k}}\right),$$

где h'_c и h''_c — длины перпендикуляров, опущенных из точки A на оси свободных вихрей, сходящих с торцов i-х панелей обеих половин модели отображенного крыла (рис. 3). В безразмерной форме получим:

$$\bar{h}'_{ci,k} = \sqrt{\bar{\eta}^2 \cos^2\alpha + \left\{\left[i - (k + 0{,}5)\right]\lambda_n^*\right\}^2},$$

$$\bar{h}''_{ci,k} = \sqrt{\bar{\eta}^2 \cos^2\alpha + \left\{\left[i + (k + 0{,}5)\right]\lambda_n^*\right\}^2};$$

$$\bar{h}'_{ci+1,k} = \sqrt{\bar{\eta}^2 \cos^2\alpha + \left\{\left[i + 1 - (k + 0{,}5)\right]\lambda_n^*\right\}^2};$$

$$\bar{h}''_{ci+1,k} = \sqrt{\bar{\eta}^2 \cos^2\alpha + \left\{\left[i + 1 + (k + 0{,}5)\right]\lambda_n^*\right\}^2};$$

$$\bar{\eta} = \bar{\eta}\left(\alpha, h, \theta'\right) =$$

$$= 2\overline{h} + 2\bar{a}_k^*\left(1 + \cos\theta'\right)\sin\alpha + 2\left[\lambda^* - (k + 0,5)\,\bar{\lambda}_n^*\right]\operatorname{tg}\chi_з \sin\alpha,$$

где $2\overline{h} + 2\left[\lambda^* - (k + 0{,}5)\,\lambda_n^*\right]\operatorname{tg}\chi_з \sin\alpha$ — относительное расстояние по вертикали между концами хорд, проведенных через средние сечения k-х панелей (стреловидное крыло);

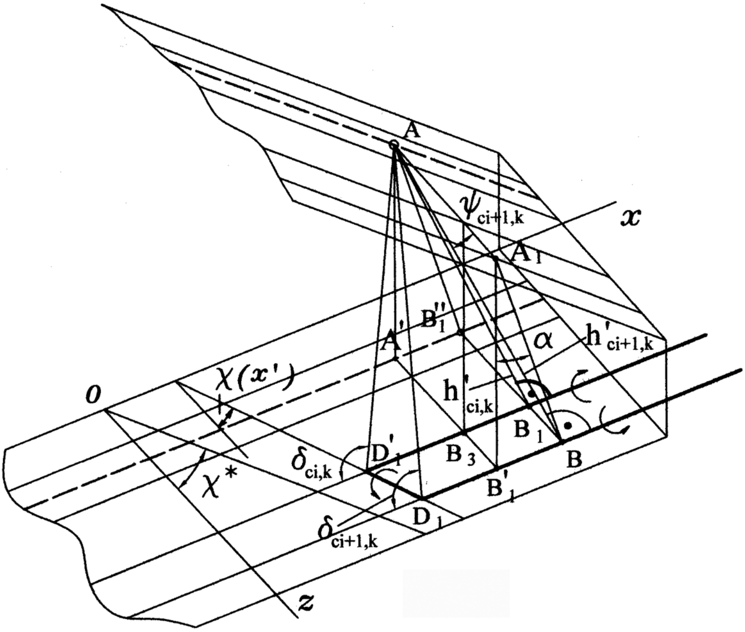

Рис. 3. Схема к вычислению скоростей, вызванных свободными вихрями модели отображенного крыла

$$\cos\delta'_{ci+1,k} =$$

$$= -\frac{\bar\eta\sin\alpha + \bar a_{i+1}\left(\cos\theta - \cos\theta'\right) - \left[i+1-(k+0,5)\right]\lambda_n^*\,\mathrm{tg}\,\chi\left(\theta'\right)}{\sqrt{\left(\bar h'_{ci+1,k}\right)^2 + \left\{\bar\eta\sin\alpha + \bar a_{i+1}\left(\cos\theta - \cos\theta'\right) - \left[i+1-(k+0,5)\right]\lambda_n^*\,\mathrm{tg}\,\chi\left(\theta'\right)\right\}^2}},$$

$$\cos\delta'_{ci,k} =$$

$$= -\frac{\bar\eta\sin\alpha + \bar a_{i}\left(\cos\theta - \cos\theta'\right) - \left[i-(k+0,5)\right]\lambda_n^*\,\mathrm{tg}\,\chi\left(\theta'\right)}{\sqrt{\left(\bar h'_{ci,k}\right)^2 + \left\{\bar\eta\sin\alpha + \bar a_{i}\left(\cos\theta - \cos\theta'\right) - \left[i-(k+0,5)\right]\lambda_n^*\,\mathrm{tg}\,\chi\left(\theta'\right)\right\}^2}},$$

$$\cos\delta''_{ci+1,k} =$$

$$= -\frac{\bar\eta\sin\alpha + \bar a_{i+1}\left(\cos\theta - \cos\theta'\right) - \left[i+1-(k+0,5)\right]\lambda_n^*\,\mathrm{tg}\,\chi\left(\theta'\right)}{\sqrt{\left(\bar h'_{ci+1,k}\right)^2 + \left\{\bar\eta\sin\alpha + \bar a_{i+1}\left(\cos\theta - \cos\theta'\right) - \left[i+1+(k+0,5)\right]\lambda_n^*\,\mathrm{tg}\,\chi\left(\theta'\right)\right\}^2}},$$

$$\cos\delta''_{ci,k} =$$

$$= -\frac{\bar\eta\sin\alpha + \bar a_{i+1}\left(\cos\theta - \cos\theta'\right) - \left[i-(k+0,5)\right]\lambda_n^*\,\mathrm{tg}\,\chi\left(\theta'\right)}{\sqrt{\left(\bar h''_{ci,k}\right)^2 + \left\{\bar\eta\sin\alpha + \bar a_{i}\left(\cos\theta - \cos\theta'\right) - \left[i-(k+0,5)\right]\lambda_n^*\,\mathrm{tg}\,\chi\left(\theta'\right)\right\}^2}}.$$

Для лежащей в плоскости AA_1BB_1'' (см. рис. 3) составляющей скорости, вызванной в точке A реального крыла элементарными свободными вихрями i-х панелей отображенного крыла с координатами точек схода $\bar{a}_i x'$ или $-\bar{a}_i \dfrac{b_0}{2}\cos\theta'$ и $\bar{a}_{i+1}x'$ или $-\bar{a}_{i+1}\dfrac{b_0}{2}\cos\theta'$, нормальной к поверхности отображенного крыла, можно получить

$$d\bar{V}'_{ci,k} = \frac{\bar{\gamma}_i \bar{a}_i^* \cos\chi \sin\theta d\theta}{4\pi} \left\{ \frac{\cos\psi'_{ci+1,k}\left(1+\cos\delta'_{ci+1,k}\right)}{\bar{h}'_{ci+1,k}} - \right.$$

$$- \frac{\cos\psi'_{ci,k}\left(1+\cos\delta'_{ci,k}\right)}{\bar{h}'_{ci,k}} + \frac{\cos\psi''_{ci+1,k}\left(1+\cos\delta''_{ci+1,k}\right)}{\bar{h}''_{ci+1,k}} -$$

$$\left. - \frac{\cos\psi''_{ci,k}}{\bar{h}''_{ci,k}}\left(1+\cos\delta''_{ci,k}\right)\right\}, \quad (4)$$

где

$$\cos\psi'_{ci+1,k} = \frac{[i+1-(k+0,5)]\,\lambda_n^*}{h'_{ci+1,k}}, \quad \cos\psi'_{ci,k} = \frac{[i-(k+0,5)]\,\lambda_n^*}{h'_{ci,k}},$$

$$\cos\psi''_{ci+1,k} = \frac{[i+1+(k+0,5)]\,\lambda_n^*}{h''_{ci+1,k}}, \quad \cos\psi''_{ci,k} = \frac{[i+(k+0,5)]\,\lambda_n^*}{h''_{ci,k}}.$$

Проецируя эту скорость на нормаль к поверхности реального крыла в точке A, получим

$$d\bar{V}^{(n)}_{ci,k} = d\bar{V}'_{ci,k}\cos 2\alpha. \quad (5)$$

Интегрируя уравнение (5) с учетом выражения (4) по корневой хорде модели отображенного крыла, нормальную к поверхности реального крыла в точке A безразмерную скорость, вызванную всеми свободными вихрями, сходящими с торцов i-х панелей отображенного крыла, можно получить в виде

$$\overline{V}^{(n)}_{ci,k}\left(\alpha,\theta',\overline{h}\right) = \frac{\bar{a}_i^*}{2\pi}\int\limits_0^\pi \overline{\gamma}_i\left(\alpha,\theta\right)\left\{ \frac{[i+1-(k+0,5)]\,\lambda_n^*\cos 2\alpha}{2\left[\overline{h}'_{ci+1,k}\left(\alpha,\theta,\theta',\overline{h}\right)\right]^2}\times\right.$$

$$\times\left[1+\cos\delta'_{ci+1,k}\left(\alpha,\theta,\theta',\overline{h}\right)\right] -$$

$$- \frac{[i-(k+0,5)]\,\lambda_n^*\cos 2\alpha}{2\left[\overline{h}'_{ci,k}\left(\alpha,\theta,\theta',\overline{h}\right)\right]^2}\left[1+\cos\delta'_{ci,k}\left(\alpha,\theta,\theta',\overline{h}\right)\right] +$$

$$+\frac{[i+1+(k+0,5)]\,\lambda_n^*\cos 2\alpha}{2\left[\overline{h}''_{ci+1,k}\left(\alpha,\theta,\theta',\overline{h}\right)\right]^2}\left[1+\cos\delta''_{ci+1,k}\left(\alpha,\theta,\theta',\overline{h}\right)\right]-$$

$$\left.-\frac{[i+(k+0,5)]\,\lambda_n^*\cos 2\alpha}{2\left[\overline{h}''_{ci,k}\left(\alpha,\theta,\theta',\overline{h}\right)\right]^2}\left[1+\cos\delta''_{ci,k}\left(\alpha,\theta,\theta',\overline{h}\right)\right]\right\}\cos\chi(\theta)\sin\theta d\theta \tag{6}$$

или

$$\overline{V}_{ci,k}^{(n)}\left(\alpha,\theta',\overline{h}\right)=\frac{\overline{a}_i^*}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\overline{\gamma}_i(\alpha,\theta)\omega_{ik}^*\left(\alpha,\theta,\theta',\overline{h}\right)\cos\chi(\theta)\sin\theta d\theta,$$

где через ω_{ik}^* обозначено выражение в фигурных скобках формулы (6).

Суммируя по всем панелям отображенного крыла, получим

$$\bar{V}_{ck}^{(n)}\left(\alpha,\theta',\overline{h}\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\bar{V}_{ci,k}^{(n)}\left(\alpha,\theta',\overline{h}\right).$$

Распределение вихревой плотности по хордам панелей отображенного $\bar{\gamma}_i(\alpha,\theta)$ и реального $\bar{\bar{\gamma}}_i\left(\alpha,\theta,\overline{h}\right)$ крыльев представляется приближенно тригонометрическими рядами [2]:

$$\bar{\gamma}_i(\alpha,\theta)=2\left[A_{0i}(\alpha)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}+\sum_{q=1}^{p}A_{qi}(\alpha)\sin q\theta\right],$$

$$\bar{\bar{\gamma}}_i\left(\alpha,\theta,\overline{h}\right)=2\left[B_{0i}\left(\alpha,\bar{h}\right)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}+\sum_{q=1}^{p}B_{qi}\left(\alpha,\bar{h}\right)\sin q\theta\right].$$

Распределение вихревой плотности модели отображенного крыла считается заданным — полученным из расчета крыла в свободном потоке (по методике [2]), соответственно, заданными принимаются и коэффициенты ряда $A_{0i}(\alpha), A_{1i}(\alpha),\ldots,A_{pi}(\alpha)$.

Уравнение непроницаемости. Вычисление величины и закона распределения вихревой плотности модели реального крыла около экрана. С учетом действия вихрей модели отображенного крыла уравнение непроницаемости реального крыла в точке среднего сечения k-й панели будет иметь вид

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\bar{\bar{\gamma}}_i\left(\alpha,\theta,\bar{h}\right)K_{i,k}\left(\alpha,\theta,\theta'\right)\sin\theta d\theta+\right.$$

$$+\overline{V}_{\text{п}k}^{(n)}\left(\alpha,\theta',\overline{h}\right)+\overline{V}_{\text{с}k}^{(n)}\left(\alpha,\theta',\overline{h}\right)=\sin\alpha,$$

где в соответствии с работой [2]

$$K_{i,k}\left(\alpha,\theta,\theta'\right)=\bar{a}_i^*\left[\sigma_{i,k}(\theta,\theta')+\omega_{i,k}(\alpha,\theta,\theta')\right]\cos\chi\left(\theta\right)$$

или

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\sum_{i=0}^{n-1}\bar{\bar{\gamma}}_i\left(\alpha,\theta,\bar{h}\right)K_{i,k}\left(\alpha,\theta,\theta'\right)\sin\theta d\theta=$$

$$=\sin\alpha+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\sum_{i=0}^{n-1}\bar{\gamma}_i\left(\alpha,\theta\right)K_{i,k}^*\left(\alpha,\theta,\theta',\bar{h}\right)\sin\theta d\theta,\quad(7)$$

где

$$K_{i,k}^*\left(\alpha,\theta,\theta',\bar{h}\right)=\bar{a}_i^*\left[\sigma_{i,k}^*\left(\alpha,\theta,\theta',\overline{h}\right)+\omega_{i,k}^*\left(\alpha,\theta,\theta',\overline{h}\right)\right]\cos\chi(\theta).$$

Второе слагаемое правой части уравнения (7) при заданных значениях коэффициентов ряда для $\bar{\gamma}_i$ приводит задачу к расчету вихревой плотности крыла с переменным по размаху и хордам углом атаки:

$$\sin\alpha_k^*(\theta',\alpha,\bar{h})=\sin\alpha+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\sum_{i=0}^{n-1}\bar{\gamma}_i\left(\alpha,\theta\right)K_{i,k}^*\left(\alpha,\theta,\theta',\bar{h}\right)\sin\theta d\theta.\quad(8)$$

Для примера воспользуемся простейшим представлением вихревой плотности $\bar{\bar{\gamma}}_i$ трехчленным выражением:

$$\bar{\bar{\gamma}}_i\left(\alpha,\theta,\overline{h}\right)=2\left[B_{0i}\left(\alpha,\bar{h}\right)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}+B_{1i}\left(\alpha,\bar{h}\right)\sin\theta+B_{2i}\left(\alpha,\bar{h}\right)\sin 2\theta\right],$$

которое позволяет вычислить суммарные аэродинамические характеристики как для каждой панели, так и для крыла в целом.

Для этого простейшего случая, опуская параметры в круглых скобках в выражениях (7) и (8) за исключением координаты точки θ' в среднем сечении k-й панели реального крыла, система уравнений непроницаемости будет иметь следующий вид:

$$B_{00}\int\limits_0^{\pi}K_{0,0}(\theta_1')(1+\cos\theta)d\theta+B_{10}\int\limits_0^{\pi}K_{0,0}(\theta_1')\sin^2\theta d\theta+$$

$$+B_{20}\int\limits_0^{\pi}K_{0,0}(\theta_1')\sin 2\theta\sin\theta d\theta++B_{01}\int\limits_0^{\pi}K_{1,0}(\theta_1')(1+\cos\theta)d\theta+$$

$$+B_{11}\int\limits_0^{\pi}K_{1,0}(\theta_1')\sin^2\theta d\theta+B_{21}\int\limits_0^{\pi}K_{1,0}(\theta_1')\sin 2\theta\sin\theta d\theta+$$

$$+ B_{02}\int\limits_0^\pi K_{2,0}(\theta_1')(1+\cos\theta)d\theta + B_{12}\int\limits_0^\pi K_{2,0}(\theta_1')\sin^2\theta d\theta +$$

$$+ B_{22}\int\limits_0^\pi K_{2,0}(\theta_1')\sin 2\theta\sin\theta d\theta = \pi\sin\alpha_0^*(\theta_1');$$

$$B_{00}\int\limits_0^\pi K_{0,0}(\theta_2')(1+\cos\theta)d\theta + B_{10}\int\limits_0^\pi K_{0,0}(\theta_2')\sin^2\theta d\theta +$$

$$+ B_{20}\int\limits_0^\pi K_{0,0}(\theta_2')\sin 2\theta\sin\theta d\theta + B_{01}\int\limits_0^\pi K_{1,0}(\theta_2')(1+\cos\theta)d\theta +$$

$$+ B_{11}\int\limits_0^\pi K_{1,0}(\theta_2')\sin^2\theta d\theta + B_{21}\int\limits_0^\pi K_{1,0}(\theta_2')\sin 2\theta\sin\theta d\theta +$$

$$+ B_{02}\int\limits_0^\pi K_{2,0}(\theta_2')(1+\cos\theta)d\theta + B_{12}\int\limits_0^\pi K_{2,0}(\theta_2')\sin^2\theta d\theta +$$

$$+ B_{22}\int\limits_0^\pi K_{2,0}(\theta_2')\sin 2\theta\sin\theta d\theta = = \pi\sin\alpha_0^*(\theta_2');$$

$$B_{00}\int\limits_0^\pi K_{0,0}(\theta_3')(1+\cos\theta)d\theta + B_{10}\int\limits_0^\pi K_{0,0}(\theta_3')\sin^2\theta d\theta +$$

$$+ B_{20}\int\limits_0^\pi K_{0,0}(\theta_3')\sin 2\theta\sin\theta d\theta + B_{01}\int\limits_0^\pi K_{1,0}(\theta_3')(1+\cos\theta)d\theta +$$

$$+ B_{11}\int\limits_0^\pi K_{1,0}(\theta_3')\sin^2\theta d\theta + B_{21}\int\limits_0^\pi K_{1,0}(\theta_3')\sin 2\theta\sin\theta d\theta +$$

$$+ B_{02}\int\limits_0^\pi K_{2,0}(\theta_3')(1+\cos\theta)d\theta + B_{12}\int\limits_0^\pi K_{2,0}(\theta_3')\sin^2\theta d\theta +$$

$$+ B_{22}\int\limits_0^\pi K_{2,0}(\theta_3')\sin 2\theta\sin\theta d\theta = \pi\sin\alpha_0^*(\theta_3').$$

Для определения девяти коэффициентов ряда (0, 1 и 2-я панели) необходимо записать еще по три уравнения непроницаемости для

1 и 2-й панелей. Все эти девять коэффициентов вычисляются для фиксированных значений $\bar{h}$ и α.

Вычисление аэродинамических характеристик. Вихревую плотность

$$\bar{\bar{\gamma}}_i\left(\alpha,\theta,\bar{h}\right)=2\left[\bar{B}_{0i}\left(\alpha,\bar{h}\right)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}+\sum_{q=1}^{p}\bar{B}_{qi}\left(\alpha,\bar{h}\right)\sin\left(q\theta\right)\right]$$

можно найти с учетом индукции отображенного крыла аэродинамические характеристики крыла около экрана можно вычислить по формулам, полученным для изолированного крыла [2].

Пренебрегая касательными составляющими скоростей, вызванными вихревой системой отображенного крыла, коэффициент нормальной силы, действующей на k-ю панель, можно определить по формуле

$$C_{yk}\left(\alpha,\bar{h}\right)=\int\limits_0^{\pi}\bar{\bar{\gamma}}_k\left(\alpha,\theta',\bar{h}\right)\overline{V}_k^{(\chi)}\left(\alpha,\theta'\right)\sin\theta' d\theta',$$

где

$$\bar{V}_k^{(\chi)}\left(\alpha,\theta'\right)=\left[\cos\alpha+\bar{V}_{ck}^{(x)}\left(\alpha,\theta'\right)\right]\cos\chi\left(\theta'\right)-\bar{V}_{ck}^{(z)}\left(\alpha,\theta'\right)\sin\chi\left(\theta'\right)$$

— безразмерное значение проекции полной относительной касательной скорости на нормаль к оси элементарного вихря с координатой $x'\left(\theta'\right)$ в центральном сечении крыла в плоскости k-й панели; $\overline{V}_{ck}^{(x)}$ и $\overline{V}_{ck}^{(z)}$ — безразмерные значения проекций скорости $\overline{V}_{ck}\left(\alpha,\theta'\right)$ на оси Ox и Oz, вызванной собственной вихревой системой реального крыла, плотность которой $\bar{\bar{\gamma}}_i$:

$$\overline{V}_{ck}^{(x)}\left(\alpha,\theta'\right)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\bar{\bar{\gamma}}_i\left(\alpha,\theta,\overline{h}\right)\omega_{ci,k}^{(x)}\left(\alpha,\theta,\theta'\right)\bar{a}_i^*\cos\chi\left(\theta\right)\right]\sin\theta d\theta,$$

где $\omega_{ci,k}^{(x)}=J_{ci,k}^{(x)}+J_{ci,k}^{\prime(x)}$,

$$J_{ci,k}^{(x)}=-\frac{\left[i+1-(k+0,5)\right]\lambda_n^*\sin\alpha}{\left(\overline{h}'_{i+1,k}\right)^2}\times$$

$$\times\left\{1+\frac{\vartheta_{i+1,k}\cos\alpha}{\sqrt{\vartheta_{i+1,k}^2\left\{\left[i+1-(k+0,5)\right]\lambda_n^*\right\}^2}}\right\}+$$

$$+\frac{\left[i-(k+0,5)\right]\lambda_n^*\sin\alpha}{\left(\overline{h}'_{i,k}\right)^2}\left\{1+\frac{\vartheta_{i,k}\cos\alpha}{\sqrt{\vartheta_{i,k}^2+\left\{\left[i-(k+0,5)\right]\lambda_n^*\right\}^2}}\right\};$$

$$J'^{(x)}_{ci,k} = -\frac{\left[(i+1)+(k+0,5)\right]\lambda_n^*\sin\alpha}{\left(\overline{h}''_{i+1,k}\right)^2}\times$$

$$\times\left\{1+\frac{\vartheta_{i+1,k}\cos\alpha}{\sqrt{\vartheta^2_{i+1,k}+\left\{\left[i+1+(k+0{,}5)\right]\lambda_n^*\right\}^2}}\right\}+$$

$$+\frac{\left[i+(k+0{,}5)\right]\lambda_n^*\sin\alpha}{\left(\overline{h}''_{i,k}\right)^2}\left\{1+\frac{\vartheta_{i,k}\cos\alpha}{\sqrt{\vartheta^2_{i,k}+\left\{\left[i+(k+0{,}5)\right]\lambda_n^*\right\}^2}}\right\};$$

$$\bar{V}^{(z)}_{ck}\left(\alpha,\theta'\right)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\bar{\bar{\gamma}}_i\left(\alpha,\theta,\bar{h}\right)\omega^{(z)}_{ci,k}\left(\alpha,\theta,\theta'\right)\bar{a}_i^*\cos\chi\left(\theta\right)\right]\sin\theta d\theta,$$

где $\omega^{(z)}_{ci,k}=J^{(z)}_{ci,k}+J'^{(z)}_{ci,k}$,

$$J^{(z)}_{ci,k}=-\frac{\vartheta_{i+1,k}}{\left(\overline{h}'_{i+1,k}\right)^2}\left\{1+\frac{\vartheta_{i+1,k}\cos\alpha}{\sqrt{\vartheta^2_{i+1,k}+\left\{\left[i+1-(k+0,5)\right]\lambda_n^*\right\}^2}}\right\}+$$

$$+\frac{\vartheta_{i,k}}{\left(\overline{h}'_{i,k}\right)^2}\left\{1+\frac{\vartheta_{i,k}\cos\alpha}{\sqrt{\vartheta^2_{i,k}+\left\{\left[i-(k+0{,}5)\right]\lambda_n^*\right\}^2}}\right\};$$

$$J'^{(z)}_{ci,k}=-\frac{\vartheta_{i+1,k}}{\left(\overline{h}''_{i+1,k}\right)^2}\left\{1+\frac{\vartheta_{i+1,k}\cos\alpha}{\sqrt{\vartheta^2_{i+1,k}+\left\{\left[i+1+(k+0{,}5)\right]\lambda_n^*\right\}^2}}\right\}+$$

$$+\frac{\vartheta_{i,k}}{\left(\overline{h}''_{i,k}\right)^2}\left\{1+\frac{\vartheta_{i,k}\cos\alpha}{\sqrt{\vartheta^2_{i,k}+\left\{\left[i+(k+0,5)\right]\lambda_n^*\right\}^2}}\right\},$$

$$\left(\overline{h}'_{i+1,k}\right)^2=\vartheta^2_{i+1,k}\sin^2\alpha+\left\{\left[i+1-(k+0{,}5)\right]\lambda_n^*\right\}^2,$$

$$\left(\overline{h}'_{i,k}\right)^2=\vartheta^2_{i,k}\sin^2\alpha+\left\{\left[i-(k+0,5)\right]\lambda_n^*\right\}^2,$$

$$\left(\overline{h}''_{i+1,k}\right)^2=\vartheta^2_{i+1,k}\sin^2\alpha+\left\{\left[i+1+(k+0{,}5)\right]\lambda_n^*\right\}^2,$$

$$\left(\overline{h}''_{i,k}\right)^2=\vartheta^2_{i,k}\sin^2\alpha+\left\{\left[i+(k+0{,}5)\right]\lambda_n^*\right\}^2,$$

$$\vartheta_{i+1,k} = \bar{a}_k^*(\cos\theta - \cos\theta') - [i + 1 - (k + 0{,}5)]\,\lambda_n^*\,\mathrm{tg}\,\chi(\theta),$$
$$\vartheta_{i,k} = \bar{a}_k^*(\cos\theta - \cos\theta') - [i - (k + 0{,}5)]\,\lambda_n^*\,\mathrm{tg}\,\chi(\theta).$$

Для коэффициента момента тангажа, действующего на k-ю панель относительно оси, проходящей через переднюю точку корневой хорды, параллельной Oz, и коэффициента давления в точке среднего сечения k-й панели с координатой θ' в корневом сечении крыла можно получить

$$m_{zk}\left(\alpha, \overline{h}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \bar{\bar{\gamma}}_k\left(\alpha, \theta', \bar{h}\right) \overline{V}_k^{(\chi)}\left(\alpha, \theta'\right) \left[1 + \frac{\lambda_n^*}{\bar{a}_k^*}\left(k + 0{,}5\right) \mathrm{tg}\,\chi_{\text{п}} - \cos\theta'\right] \sin\theta' d\theta',$$

$$C_{pk}\left(\alpha, \theta', \overline{h}\right) = 2\bar{\bar{\gamma}}_k\left(\alpha, \theta', \bar{h}\right) \overline{V}_k^{(\chi)}\left(\alpha, \theta'\right).$$

Суммарные характеристики крыла вблизи экрана определяются по следующим формулам:

$$C_y\left(\alpha, \overline{h}\right) = \frac{2\sum\limits_{i=0}^{n-1} C_{yk}\left(\alpha, \overline{h}\right) \bar{a}_k^*}{n\left(1 + \bar{a}_{\text{конц}}\right)};$$

$$m_z\left(\alpha, \overline{h}\right) = \frac{2\sum\limits_{i=0}^{n-1} m_{zk}\left(\alpha, \overline{h}\right) \left(\bar{a}_k^*\right)^2}{n\left(1 + \bar{a}_{\text{конц}}\right)};$$

$$C_d\left(\alpha, \overline{h}\right) = \frac{m_z\left(\alpha, \overline{h}\right)}{C_y\left(\alpha, \overline{h}\right)}, \quad \bar{a}_{\text{конц}} = \frac{b_{\text{конц}}}{b_0}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ермоленко С. Д., Ровных А. В. Решение задачи о крыле произвольной формы в плане, движущемся вблизи экранирующей поверхности // Изв. вузов. Авиационная техника. – 1971.
2. Пастухов А. И. Вихревое математическое моделирование обтекания тел потоком сплошной среды // Нелинейная вихревая теория несущей поверхности. – Вып. 2. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1994.

Статья поступила в редакцию 1.07.2005