Аркадий Авсеевич Полунгян родился в 1931 г., окончил в 1954 г. МВТУ им. Н.Э. Баумана. Д-р техн. наук, профессор кафедры “Колесные машины” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 90 научных работ в области динамического нагружения колесных машин.

A.A. Polunghyan (b. 1931) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1954. D. Sc. (Eng.) professor of “Wheeled Vehicles” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of over 90 publications in the field of dynamical loading of wheeled vehicles.

Александр Борисович Фоминых родился в 1938 г., окончил в 1962 г. МВТУ им. Н.Э. Баумана. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Колесные машины” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 40 научных работ в области динамики и расчета транспортных машин.

A.B. Fominykh (b. 1938) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1962. Ph. D. (Eng.), ass. professor of “Wheeled Vehicles” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of over 40 publications in the field of dynamics and design of vehicles.

УДК 621.372

Б. И. Шахтарин, В. Ю. Аливер

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДВУХ ПОДХОДОВ К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

На примере алгоритма взаимно компенсационного типа для уравнений первого порядка наблюдения и сообщения показана равнозначность двух подходов: линейной и нелинейной оптимальной фильтрации.

Решение задач линейной фильтрации при наличии помех приводит к алгоритмам взаимно компенсационного типа, которые предполагают оценивание внешней помехи в одном из каналов и использование этой оценки для компенсации помехи в другом канале. Цель настоящей работы — показать равнозначность двух подходов к решению задачи компенсации внешней помехи, т.е. эквивалентность методов линейной и нелинейной оптимальной фильтрации.

Пусть принятое колебание имеет вид

$$y(t) = \lambda(t) + \xi(t) + n(t), \tag{1}$$

где $\lambda(t)$ и $\xi(t)$ — полезный сигнал и помеха, представляющие собой гауссов марковский процесс, $n(t)$ — гауссовский белый шум со спектральной плотностью $S_0(\omega) = N_0$ и нулевым математическим ожиданием. Сигнал и помеху зададим следующими дифференциальными уравнениями:

$$\dot{\lambda}(t) = -\alpha\lambda(t) + n_\lambda(t); \;\; \dot{\xi}(t) = -\beta\xi(t) + n_\xi(t), \tag{2}$$

где $n_\lambda(t)$ и $n_\xi(t)$ — взаимонезависимые гауссовские белые шумы со спектральными плотностями

$$S_\lambda(\omega) = N_\lambda \;\text{ и }\; S_\xi(\omega) = N_\xi. \tag{3}$$

Поскольку матрицы формирующего фильтра F и наблюдения H постоянны, а уравнения линейны, справедлива линейная модель оптимальной фильтрации. Однако в работе [1] использовался аппарат нелинейной оптимальной фильтрации.

Использование методов линейной оптимальной фильтрации.

С помощью аппарата линейной оптимальной фильтрации (двумерного линейного фильтра Калмана) выведем дифференциальные уравнения оценок $\widehat{\lambda}$ и $\widehat{\xi}$.

Запишем уравнения в векторно-матричном виде:

$$y(t) = H\Lambda + n(t) \;\text{ — принятое колебание,} \tag{4}$$

где $H = [1;1]$; $\Lambda = (\lambda;\xi)^{\text{т}}$;

$$\frac{d\Lambda}{dt} = F\Lambda + w(t) \;\text{ — дифференциальное уравнение сообщения,} \tag{5}$$

где

$$F = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix}; \;\; w(t) = \begin{bmatrix} n_\lambda(t) \\ n_\xi(t) \end{bmatrix}.$$

Дифференциальное уравнение оценки запишем в виде

$$\frac{d\widehat{\Lambda}(t)}{dt} = F(t)\widehat{\Lambda}(t) + K(t)\left[y(t) - H(t)\widehat{\Lambda}(t)\right], \tag{6}$$

где матрицу коэффициента усиления $K(t)$ найдем из соотношения

$$K(t) = D(t)H^{\text{т}}(t)S_0^{-1}(t), \tag{7}$$

где $S_0^{-1}(t) = \begin{bmatrix} N_0(t) & 0 \\ 0 & N_0(t) \end{bmatrix}^{-1}$ [2, 3].

Матрицу дисперсий ошибки измерения находим из соотношения [4]:

$$\frac{dD(t)}{dt} = F(t)D(t) + D(t)F^{\text{т}}(t) + G(t)Q(t)G(t)^{\text{т}} - \\ - D(t)H^{\text{т}}(t)S_0^{-1}(t)H(t)D(t), \quad (8)$$

где $Q = \begin{bmatrix} N_\lambda & 0 \\ 0 & N_\xi \end{bmatrix}$, $G(t)$ в данном случае единичная матрица [2–4].

Поскольку рассматриваем стационарный случай, $\frac{dD(t)}{dt} = 0$, то и матрицу дисперсий находим из следующего соотношения:

$$FD + DF^{\text{т}} + Q - DH^{\text{т}}N_0^{-1}HD = 0. \quad (9)$$

Легко показать, что в выражении (9)

$$FD + DF^{\text{т}} = \begin{pmatrix} -2\alpha d_{11} & -(\alpha+\beta)d_{12} \\ -(\alpha+\beta)d_{21} & -2\beta d_{22} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22} — элементы матрицы D, причем $d_{12} = d_{21}$. Кроме того,

$$DH^{\text{т}} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} + d_{12} \\ d_{12} + d_{22} \end{pmatrix};$$

$$HD = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} + d_{12} & d_{12} + d_{22} \end{pmatrix};$$

$$DH^{\text{т}}N_0^{-1}HD = N_0^{-1}DH^{\text{т}}HD = \\ = N_0^{-1} \begin{pmatrix} (d_{11}+d_{12})^2 & (d_{12}+d_{22})(d_{11}+d_{12}) \\ (d_{12}+d_{22})(d_{11}+d_{12}) & (d_{11}+d_{22})^2 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Подставляя в соотношение (9) выражения (10), (11) и матрицу Q согласно уравнению (4), получим систему уравнений для элементов матрицы D:

$$\begin{aligned} & N_\lambda - 2\alpha d_{11} - N_0^{-1}(d_{11}+d_{12})^2 = 0; \\ & N_\xi - 2\beta d_{22} - N_0^{-1}(d_{22}+d_{12})^2 = 0; \\ & -(\alpha+\beta)d_{12} - N_0^{-1}(d_{11}+d_{12})(d_{22}+d_{12}) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

С учетом соотношения (7) запишем систему уравнений (12) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & N_\lambda - 2\alpha d_{11} - N_0^{-1}K_1^2 = 0; \\ & N_\xi - 2\beta d_{22} - N_0^{-1}K_2^2 = 0; \\ & -(\alpha+\beta)d_{12} - N_0^{-1}K_1K_2 = 0; \\ & K_1 = N_0^{-1}(d_{11}+d_{12}); \\ & K_2 = N_0^{-1}(d_{22}+d_{12}), \end{aligned} \quad (13)$$

где K_1 и K_2 — коэффициенты усиления, $K = (K_1 \;\; K_2)^{\text{т}}$.

Решив систему уравнений (13), получим коэффициенты усиления и, согласно уравнению (6), находим оценку сигнала и помехи $\widehat{\Lambda} = (\widehat{\lambda}; \widehat{\xi})^{\text{т}}$. В скалярном виде систему дифференциальных уранений (6) запишем так:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}^* &= -\alpha\lambda^* + K_1\left[y(t) - (\lambda^* + \xi*)\right]; \\ \dot{\xi}^* &= -\beta\xi^* + K_2\left[y(t) - (\lambda^* + \xi^*)\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

Применим к уравнениям (14) преобразование Лапласа:

$$\begin{aligned} p\lambda^*(p) &= -\alpha\lambda^*(p) + K_1\left[Y(p) - (\lambda^*(p) + \xi^*(p))\right]; \\ p\xi^*(p) &= -\beta\xi^*(p) + K_2\left[Y(p) - (\lambda^*(p) + \xi^*(p))\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Из выражения (15) находим передаточную функцию фильтра по сигналу

$$H_\lambda(p) = \frac{\lambda^*(p)}{Y(p)} = \frac{K_1 - \dfrac{K_1K_2}{p+\beta+K_2}}{p+\alpha+K_1 - \dfrac{K_1K_2}{p+\beta+K_2}} = \\ = \frac{K_1(p+\beta+K_2) - K_1K_2}{(p+\alpha+K_1)(p+\beta+K_2) - K_1K_2} \tag{16}$$

и по помехе

$$H_\xi(p) = \frac{\xi^*(p)}{Y(p)} = \frac{K_2 - \dfrac{K_1K_2}{p+\alpha+K_2}}{p+\beta+K_2 - \dfrac{K_1K_2}{p+\alpha+K_1}} = \\ = \frac{K_2(p+\alpha+K_1) - K_1K_2}{(p+\alpha+K_1)(p+\beta+K_2) - K_1K_2}. \tag{17}$$

Заменив в функциях (16) и (17) p на $j\omega$, найдем модуль передаточной функции:

$$|H_\lambda(j\omega)| = \frac{K_1\sqrt{\beta^2+\omega^2}}{\sqrt{\left(-\omega^2 + \alpha K_2 + \beta K_1 + \alpha\beta\right)^2 + \omega^2\left(\alpha+\beta+K_1+K_2\right)^2}}; \tag{18}$$

$$|H_\xi(j\omega)| = \frac{K_2\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}{\sqrt{\left(-\omega^2 + \alpha K_2 + \beta K_1 + \alpha\beta\right)^2 + \omega^2\left(\alpha+\beta+K_1+K_2\right)^2}}. \tag{19}$$

Анализируя выражение (18), выявили, что модуль передаточной функции фильтра зависит как от α и β, так и от мощностей сигнала и помехи. На рис. 1–3 приведены графики, показывающие изменение $|H_\lambda(j\omega)|$ в зависимости от α, β и отношение сигнал/шум (ОСШ) $\eta = \sigma_\lambda^2 \Big/ \left(\sigma_\xi^2 + N_0\alpha\right)$, где

$$\sigma_\lambda^2 = \frac{N_\lambda \alpha}{2}; \quad \sigma_\xi^2 = \frac{N_\xi \beta}{2}. \tag{20}$$

Как видно из графиков, осуществляется частотная режекция помехи.

Рассмотрим пример: $\alpha = 1$, $\beta = 0{,}1$, $N_0 = 40$, $N_\xi = 0{,}5$, $N_\lambda = 1$. Тогда суммарный энергетический спектр на входе имеет вид (рис. 3)

$$S_x(\omega) = S_\lambda(\omega) + S_\xi(\omega) + N_0 = \sigma_\lambda^2 \frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2} + \sigma_\xi^2 \frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2} + N_0,$$

где σ_λ^2, σ_ξ^2 определяются согласно уравнению (20).

Использование аппарата нелинейной оптимальной фильтрации. Согласно модели нелинейной оптимальной фильтрации, при гауссовском приближении (при расширенном фильтре Калмана) уравнения фильтрации могут быть записаны в виде [1–5]

$$\frac{d\widehat{\Lambda}}{dt} = g(t,\widehat{\Lambda}) + D\left(\frac{\partial s(t,\widehat{\Lambda})}{\partial\widehat{\Lambda}}\right)^{\mathrm{T}} S_0^{-1}\left(y(t) - s(t,\widehat{\Lambda})\right); \tag{21}$$

$$\frac{dD}{dt} = \left(\frac{\partial g}{\partial\widehat{\Lambda}}\right)D + D(t)\left(\frac{\partial g}{\partial\widehat{\Lambda}}\right)^{\mathrm{T}} + GQG^{\mathrm{T}} - D\left(\frac{\partial s}{\partial\widehat{\Lambda}}\right)^{\mathrm{T}} S_0^{-1}(t)\left(\frac{\partial s}{\partial\widehat{\Lambda}}\right)D. \tag{22}$$

В данном случае имеют место следующие соотношения:

$$g(t,\widehat{\Lambda}) = F\widehat{\Lambda}; \;\; s(t,\widehat{\Lambda}) = \widehat{\lambda} + \widehat{\xi}; \;\; \left(\frac{\partial s}{\partial\Lambda}\right)^{\mathrm{T}} = [1 \quad 1]^{\mathrm{T}}. \tag{23}$$

Функция $F(t,\widehat{\Lambda})$ здесь имеет вид [2, 4]

$$F(t,\widehat{\Lambda}) = S_0^{-1}\left[y\left(\widehat{\lambda}+\widehat{\xi}\right) - 0{,}5\left(\widehat{\lambda}+\widehat{\xi}\right)^2\right]; \;\; \frac{\partial F}{\partial\lambda} = -(\lambda+\xi). \tag{24}$$

В результате получаем линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\widehat{\Lambda}(t)}{dt} = F(t)\widehat{\Lambda}(t) + D(t)H^{\mathrm{T}}(t)S_0^{-1}(t)\left[y(t) - \widehat{\lambda}(t) - \widehat{\xi}(t)\right]. \tag{25}$$

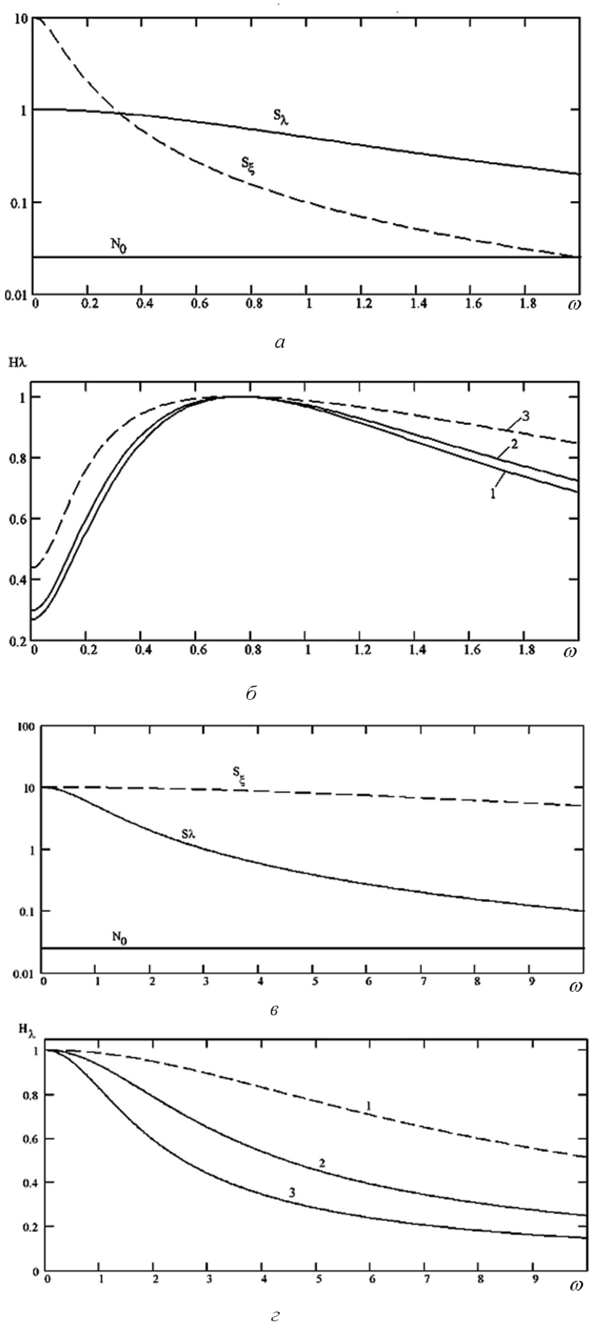

Рис. 1. Спектр сигнала $S_\lambda(\omega)$ и помехи $S_\xi(\omega)$ на входе (*а*, *в*), модуль частотной характеристики по сигналу $|H_\lambda(i\omega)|$:
1 — ОСШ=1; *2* — ОСШ=10; *3* — ОСШ=100 (*б, г*); $\alpha/\beta = 10$ (*а, б*); $\alpha/\beta = 0{,}1$ (*в, г*)

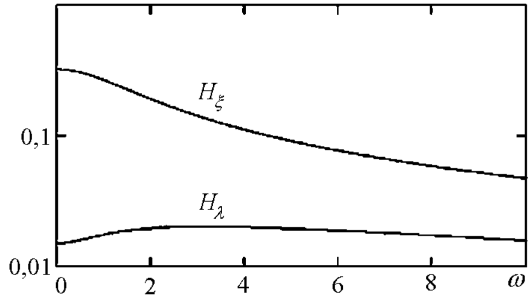

Рис. 2. Модуль частотной характеристики по сигналу $|H_\lambda(i\omega)|$ и по помехе $|H_\xi(i\omega)|$ при $\alpha = 1$, $\beta = 0,1$, $N_0 = 40$, $N_\xi = 0,5$, $N_\lambda = 1$

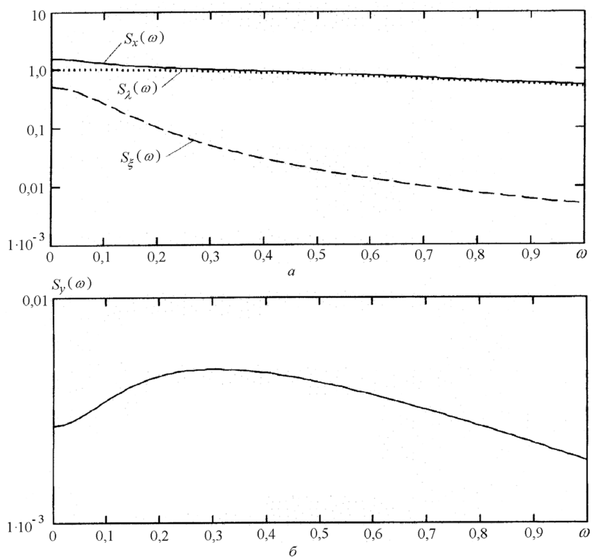

Рис. 3. Спектр сигнала на входе $S_x(\omega) = S_\lambda(\omega) + S_\xi(\omega) + N_0$ (*а*); спектр сигнала на выходе $S_y(\omega) = S_x(\omega)|H_\lambda(i\omega)|^2$ при $\alpha = 1$, $\beta = 0,1$, $N_0 = 40$, $N_\xi = 0,5$, $N_\lambda = 1$ (*б*)

С учетом соотношения (14) видно, что уравнения(25) и (8) совпадают.

Рассмотрим уравнение для матрицы дисперсий (22). Здесь

$$\frac{\partial g}{\partial \widehat{\Lambda}} = F; \quad \frac{\partial s}{\partial \widehat{\Lambda}} = H; \quad GQG^{\mathrm{T}} = Q. \tag{26}$$

Таким образом, подставляя соотношения (26) в уравнение (22), получаем линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dD}{dt} = FD + DF^{\mathrm{T}} + Q - DH^{\mathrm{T}} S_0^{-1} HD,$$

совпадающее с полученным ранее уравнением (8).

Таким образом, на основе методов оптимальной фильтрации решена задача оценки сообщения и помехи для приведенных ранее условий, показана эквивалентность методов линейной и нелинейной оптимальной фильтрации в случае линейных дифференциальных уравнений сигнала и помехи и постоянных матриц формирующего фильтра и наблюдения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Саютин Ю. В., Степанов А. С. Фильтрация непрерывных сигналов на фоне марковских помех и белого шума // Радиотехника и электроника. – 1972. – № 5. – С. 1078–1082.
2. Шахтарин Б. И. Случайные процессы в радиотехнике. 2-е изд., испр. и дополн. Часть 1. Линейные системы. – М.: Радио и связь, 2002. – 568 с.: ил.
3. Тихонов В. И., Кульман Н. К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. – М.: Советское радио, 1975. – 704 с.
4. Тихонов В. И. Нестандартные условия нелинейной фильтрации // Радиотехника. – 1997. – № 12. – С. 3–7.
5. Ярлыков М. С. Применение марковской теории нелинейной фильтрации в радиотехнике. – М.: Советское радио, 1980. – 360 с.

Статья поступила в редакцию 22.10.2002

Борис Ильич Шахтарин родился в 1933 г., окончил Ленинградскую краснознаменную военно-воздушную инженерную академию в 1958 г. и Ленинградский государственный университет в 1968 г. Д-р техн. наук, профессор кафедры “Автономные информационные и управляющие системы” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 300 научных работ и 8 монографий в области анализа систем и обработки сигнала.

B.I. Shakhtarin (b. 1933) graduated from the Leningrad Air Force Academy in 1958 and the Leningrad State University in 1968. D. Sc. (Eng.), professor of “Autonomous Information and Control Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of over 300 publications and 8 monographs in the field of system analysis and signal processing.

Вячеслав Юрьевич Аливер родился в 1978 г., аспирант кафедры “Автономные информационные и управляющие системы” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор ряда научных работ в области систем приема и обработки сигнала.

V.Yu. Aliver (b. 1978), post-graduate of “Autonomous Information and Control Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of a number of publications in the field of receiving systems and signal processing.