

С. В. Цветков

## КРИТЕРИИ ПРОЧНОСТИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ РАЗЛИЧНЫХ КЛАССОВ СИММЕТРИИ СТРУКТУРЫ

*Рассмотрены пять возможных классов симметрии структуры трансверсально-изотропных материалов. На основе функциональных базисов тензора напряжений относительно соответствующих групп ортогональных преобразований получены общие выражения для критериев прочности. Выявлены различия критериев для трансверсально-изотропных материалов разных классов симметрии.*

**Классы симметрии структуры трансверсально-изотропных материалов.** Трансверсально-изотропные материалы имеют одну ось симметрии бесконечного порядка. Эти материалы могут иметь и другие элементы симметрии, в зависимости от этого имеются пять типов трансверсально-изотропных материалов. Группы симметрии структуры этих материалов  $G_T$  по Шенфлису [1] обозначаются следующим образом:  $D_{\infty h}$ ,  $D_{\infty}$ ,  $C_{\infty v}$ ,  $C_{\infty}$ ,  $C_{\infty h}$ . Примеры данных материалов приведены на рис. 1. Они могут быть получены в результате армирования изотропной матрицы длинными параллельными элементами. Для материала группы  $D_{\infty h}$  (рис. 1, а) армирующими элементами являются волокна круглого поперечного сечения. Материалы группы  $D_{\infty}$  (рис. 1, б) армируются правыми спиралями. Для армирования материалов группы  $C_{\infty v}$  (рис. 1, в) используются волокна типа “елочка”. Материал группы  $C_{\infty}$  получается армированием правыми спиралями и волокнами-“елочками” (рис. 1, г). Для материала группы  $C_{\infty h}$  армирование производится “рулонами” (рис. 1, д). Для каждого материала армирующие элементы параллельны между собой и равномерно распределены по объему, как это обычно имеет место в однонаправленных композитных материалах.

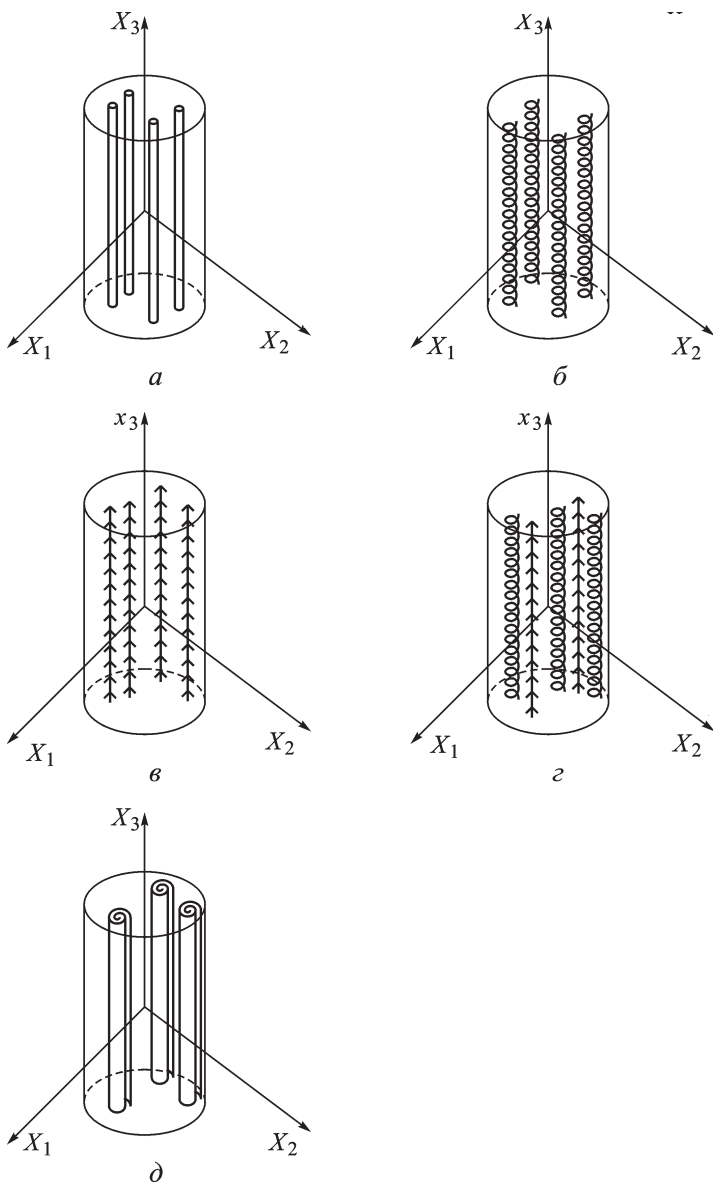
**Формулировки критериев прочности анизотропных материалов.** Феноменологический критерий прочности анизотропных материалов имеет вид

$$f(\sigma, S_k) = 1, \quad (1)$$

где  $\sigma$  — тензор напряжений;  $S_k$  — константы, характеризующие прочностные свойства материала.

Если для ортогонального преобразования с тензором  $Q$  выполняется соотношение

$$f(\sigma, S_k) = f(Q\sigma Q^T, S_k), \quad (2)$$



**Рис. 1. Примеры трансверсально-изотропных материалов различных классов симметрии структуры:**

$a - D_{\infty h}$ ;  $б - D_{\infty}$ ;  $в - C_{\infty v}$ ;  $г - C_{\infty}$ ;  $д - C_{\infty h}$

то данное ортогональное преобразование будет элементом симметрии функции  $f$ . Совокупность ортогональных преобразований, удовлетворяющих соотношению (2), образует группу симметрии функции  $G_{\phi}$ .

В силу принципа Неймана [1] имеем

$$G_{\phi} \supseteq G_T, \quad (3)$$

где  $G_T$  — группа симметрии структуры твердого тела.

В работе [2] сформулирован тензорно-полиномиальный критерий прочности для анизотропных материалов:

$$F_{ij}\sigma_{ij} + F_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + F_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn} + \dots = 1. \quad (4)$$

Компоненты тензоров  $F_{ij}$ ,  $F_{ijkl}$ ,  $F_{ijklmn}$ , ..., характеризующие прочностные свойства материала, могут быть найдены, например из экспериментов. Тип анизотропии материала накладывает определенные условия на вид тензоров  $F_{ij}$ ,  $F_{ijkl}$ , ... Вид тензоров выше четвертого ранга для многих классов симметрии не изучен. Это создает определенные трудности для применения на практике критериев (4) со степенью более 2.

Таких трудностей не возникает, если использовать инвариантно-полиномиальный критерий [3]

$$A_i X_i + A_{ij} X_i X_j + A_{ijk} X_i X_j X_k + \dots = 1, \quad (5)$$

где  $X_1, X_2, X_3, \dots$  — инварианты, входящие в полиномиальный базис (целый рациональный базис) относительно группы ортогональных преобразований, соответствующей симметрии структуры материала. Константы  $A_i, A_{ij}, \dots$  являются характеристиками прочностных свойств материала. У критериев прочности в виде (5) есть и другие преимущества по сравнению с критериями вида (4). Например, результаты экспериментов с анизотропными композиционными материалами [4] свидетельствуют о том, что прочность этих материалов существенно зависит от гидростатического давления. В работе [3] показано, что можно выбрать полиномиальный базис таким образом, что один из инвариантов будет пропорционален гидростатической составляющей тензора напряжений, а другие инварианты не будут зависеть от нее. Тогда соотношение для критерия прочности будет в явном виде выражать зависимость прочности материала от гидростатического давления.

Функция  $f(\sigma_{ij})$ , как и всякий инвариант, может быть выражена в виде зависимости от инвариантов, входящих в скалярный функциональный базис тензора  $\sigma$  относительно группы  $G_\phi$ . Во многих случаях функциональный базис бывает проще, чем полиномиальный. Функциональный базис может содержать меньшее число членов.

На основе функционального базиса инвариантов для одного из видов трансверсально-изотропных материалов строится критерий прочности [5]. Для различных классов трансверсальной изотропии выражения для критериев, полученных на основе функциональных базисов, приведены в работе [6]. Существуют различные мнения относительно функциональных базисов инвариантов симметричного тензора второго ранга для некоторых групп трансверсальной изотропии [6–8], поэтому рассмотрим этот вопрос подробнее.

**Функциональные базисы скалярных инвариантов симметричного тензора второго ранга относительно трансверсально-изотропных групп ортогональных преобразований.** Рассмотрим какие группы симметрии будут иметь скалярные функции  $f(\sigma)$  для разных типов трансверсально-изотропных материалов. Заметим, что уравнение (2) выполняется при преобразовании инверсии, т.е. когда

$$Q_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Для того чтобы получить группу симметрии скалярной функции  $G_\phi$ , ортогональное преобразование с тензором (6) должно быть добавлено к ортогональным преобразованиям, входящим в группу  $G_T$ . Таким образом находим, что материалы со следующими группами симметрии структуры:  $D_{\infty h}$ ,  $D_\infty$ ,  $C_{\infty v}$  имеют группу симметрии скалярной функции от симметричного тензора второго ранга —  $D_{\infty h}$ . Для материалов  $C_\infty$  и  $C_{\infty h}$  группа симметрии —  $C_{\infty h}$ .

В соответствии с теоремой “изотропизации” [7, 9] анизотропные тензорные функции группы симметрии  $G$  тензорных аргументов для любой конечной точечной группы и любой предельной группы могут быть выражены, как изотропные функции первоначальных тензорных аргументов и набора структурных тензоров  $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ , который имеет группу симметрии  $G$ .

Таким образом, функциональный базис скалярных инвариантов тензора  $\sigma$  относительно группы  $G$ , характеризуемой структурными тензорами  $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ , содержится в функциональном базисе изотропных инвариантов для тензоров  $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}, \sigma$ .

Для группы симметрии  $D_{\infty h}$  набор структурных тензоров состоит из одного тензора второго ранга [10]:

$$M_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

При этом декартовый базис  $e_i$  такой, что направление вектора  $e_3$  совпадает с осью трансверсальной изотропии.

В работе [11] построены изотропные скалярные, векторные, тензорные функции от векторов, симметричных и антисимметричных тензоров второго ранга. Из работы [11] находим набор изотропных инвариантов тензоров  $\sigma$  и  $M$ :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \text{tr } \boldsymbol{\sigma} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}; \\
I_2 &= \text{tr } \boldsymbol{\sigma}^2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2); \\
I_3 &= \text{tr } \boldsymbol{\sigma}^3 = \sigma_{11}^3 + \sigma_{22}^3 + \sigma_{33}^3 + 3\sigma_{11}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) + 3\sigma_{22}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2) + \\
&\quad + 3\sigma_{33}(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) + 6\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23}; \\
I_4 &= \text{tr } \mathbf{M}\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{33}; \\
I_5 &= \text{tr } \mathbf{M}\boldsymbol{\sigma}^2 = \sigma_{33}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2; \\
I_6 &= \text{tr } \mathbf{M} = 1; \\
I_7 &= \text{tr } \mathbf{M}^2 = 1; \\
I_8 &= \text{tr } \mathbf{M}^3 = 1; \\
I_9 &= \text{tr } \mathbf{M}^2\boldsymbol{\sigma}; \\
I_{10} &= \text{tr } \mathbf{M}^2\boldsymbol{\sigma}^2,
\end{aligned} \tag{8}$$

где  $\text{tr } \mathbf{B} = B_{ii}$ .

Для этого набора инвариантов имеют место соотношения  $I_9 = I_4$  и  $I_{10} = I_5$  и, кроме того,  $I_6$ ,  $I_7$  и  $I_8$  являются константами. Таким образом, функциональный базис относительно группы  $D_{\infty h}$  состоит из набора пяти инвариантов

$$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5. \tag{9}$$

Для доказательства неприводимости этого набора инвариантов можно воспользоваться теоремой, доказанной в работе [8], в соответствии с которой система инвариантов  $I_1, \dots, I_r$  функционально зависима в том и только в том случае, если для любого  $\sigma_{ij}$  ранг матрицы  $(\partial I_\alpha / \partial \sigma_{ij})$  меньше  $r$ . Матрица частных производных для системы инвариантов (9) имеет вид

$$\left( \frac{\partial I_\alpha}{\partial \sigma_{ij}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2\sigma_{11} & 2\sigma_{22} & 2\sigma_{33} \\ 3(\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) & 3(\sigma_{22}^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2) & 3(\sigma_{33}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2\sigma_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 4\sigma_{23} & 4\sigma_{13} & 4\sigma_{12} \\ \Rightarrow 6(\sigma_{22}\sigma_{23} + \sigma_{33}\sigma_{23} + \sigma_{12}\sigma_{13}) & 6(\sigma_{11}\sigma_{13} + \sigma_{33}\sigma_{13} + \sigma_{12}\sigma_{23}) & 6(\sigma_{11}\sigma_{12} + \sigma_{22}\sigma_{12} + \sigma_{13}\sigma_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\sigma_{23} & 2\sigma_{13} & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычеркивая из этой матрицы шестой столбец и находя определитель квадратной матрицы, убеждаемся, что существуют такие  $\sigma_{ij}$ ,

при которых определитель отличен от нуля. Например, определитель

$$\Delta = 24 \text{ при } \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы равняется пяти и числу инвариантов в системе (9), поэтому инварианты этой системы функционально независимы. Заметим, что неприводимый функциональный базис скалярных инвариантов относительно группы  $D_{\infty h}$  совпадает с целым рациональным базисом.

Построим функциональный базис относительно группы симметрии  $C_{\infty h}$ . Структурным тензором для этой группы является косо-симметричный тензор [10]

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

В этом случае ось трансверсальной изотропии совпадает с направлением вектора  $e_3$  декартового базиса. Из работы [11] находим набор изотропных инвариантов двух тензоров ( $\sigma$  и  $\mathbf{W}$ ):

$$\begin{aligned} J_1 &= \text{tr } \sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}; \\ J_2 &= \text{tr } \sigma^2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2); \\ J_3 &= \text{tr } \sigma^3 = \sigma_{11}^3 + \sigma_{22}^3 + \sigma_{33}^3 + 3\sigma_{11}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) + \\ &\quad + 3\sigma_{22}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2) + 3\sigma_{33}(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) + 6\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23}; \\ J_4 &= \text{tr}(\sigma \mathbf{W}^2) = -\sigma_{11} - \sigma_{22}; \\ J_5 &= \text{tr}(\sigma^2 \mathbf{W}^2) = -\sigma_{11}^2 - 2\sigma_{12}^2 - \sigma_{22}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2; \\ J_6 &= \text{tr}(\sigma^2 \mathbf{W}^2 \sigma \mathbf{W}) = -\sigma_{12}\sigma_{13}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}\sigma_{23} + \sigma_{11}\sigma_{13}\sigma_{23} + \sigma_{12}\sigma_{23}^2; \\ J_7 &= \text{tr } \mathbf{W}^2 = -2. \end{aligned} \quad (11)$$

Получаем, что функциональный базис относительно группы  $C_{\infty h}$  состоит из инвариантов

$$J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6. \quad (12)$$

Набор инвариантов (12) совпадает с целым рациональным базисом инвариантов.

Система инвариантов (9) связана с системой инвариантов (12) следующими соотношениями:

$$J_1 = I_1; \quad J_2 = I_2; \quad J_3 = I_3; \quad J_4 = I_4 - I_1; \quad J_5 = I_5 - I_2, \quad (13)$$

поэтому в качестве функционального базиса инвариантов относительно группы  $C_{\infty h}$  можно использовать набор из инвариантов

$$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6. \quad (14)$$

Матрица частных производных  $(A) = (\partial J_\alpha / \partial \sigma_{ij})$  для системы инвариантов (14) следующая:

$$(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2\sigma_{11} & 2\sigma_{22} & 2\sigma_{33} \\ 3(\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) & 3(\sigma_{22}^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2) & 3(\sigma_{33}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2\sigma_{33} \\ \sigma_{13}\sigma_{23} & -\sigma_{13}\sigma_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4\sigma_{23} & 4\sigma_{13} & 4\sigma_{12} \\ 6(\sigma_{22}\sigma_{23} + \sigma_{33}\sigma_{23} + \sigma_{12}\sigma_{13}) & 6(\sigma_{11}\sigma_{13} + \sigma_{33}\sigma_{13} + \sigma_{12}\sigma_{23}) & 6(\sigma_{11}\sigma_{12} + \sigma_{22}\sigma_{12} + \sigma_{13}\sigma_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\sigma_{23} & 2\sigma_{13} & 0 \\ -\sigma_{22}\sigma_{13} + \sigma_{11}\sigma_{13} + 2\sigma_{12}\sigma_{23} & -2\sigma_{12}\sigma_{13} - \sigma_{22}\sigma_{23} + \sigma_{11}\sigma_{23} & -\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Определитель этой матрицы  $\det(A) \equiv 0$ .

Получаем, что ранг матрицы меньше числа инвариантов в системе (14) и, следовательно, инварианты, входящие в систему (14), функционально зависимы. Однако в функциональном базисе (12) и, следовательно, базисе (14) ни один инвариант не является лишним. Для доказательства используем метод, предложенный в работе [12].

Чтобы доказать, что инвариант  $J_1$  не может быть выражен через  $J_2, J_3, J_4, J_5, J_6$ , найдем значения инвариантов (12) при

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1/\sqrt{6} \\ -2 & 0 & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$\sigma_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1/\sqrt{6} \\ 2 & 0 & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1 \end{pmatrix}.$$

Получаем  $J_2(\sigma_{ij}^{(1)}) = J_2(\sigma_{ij}^{(2)})$ ,  $J_3(\sigma_{ij}^{(1)}) = J_3(\sigma_{ij}^{(2)})$ ,  $J_4(\sigma_{ij}^{(1)}) = J_4(\sigma_{ij}^{(2)})$ ,  $J_5(\sigma_{ij}^{(1)}) = J_5(\sigma_{ij}^{(2)})$ ,  $J_6(\sigma_{ij}^{(1)}) = J_6(\sigma_{ij}^{(2)})$ , однако  $J_1(\sigma_{ij}^{(1)}) \neq J_1(\sigma_{ij}^{(2)})$ .

Для доказательства, что в системе инвариантов (12) не является лишним инвариант  $J_2$ , достаточно вычислить инварианты при

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \sigma_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для инварианта  $J_3$  надо вычислить инварианты при

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\sigma_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

для инварианта  $J_4$  — при

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$\sigma_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

для инварианта  $J_5$  — при

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\sigma_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

для инварианта  $J_6$  — при

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\sigma_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что функциональный базис (12) можно упростить. Действительно, между инвариантами существует зависимость

$$\begin{aligned} & [2J_3 + 4(J_1 + J_4)^3 - 6(J_1 + J_4)(J_5 + J_2) - 3J_4J_5 - J_4^3]^2 + \\ & + 9[J_5 + J_2 - (J_1 + J_4)^2]^2[J_4^2 + 2J_2 + 4J_5 - 2(J_1 + J_4)^2] + 36J_6^2 = 0. \end{aligned} \quad (15)$$



Доказательство этого соотношения дано в Приложении. Из соотношения (15) инвариант  $J_6$  может быть выражен через остальные инварианты  $J_1, J_2, J_3, J_4, J_5$ , но не однозначно, а с точностью до знака.

Таким образом, неприводимый функциональный базис скалярных инвариантов относительно группы  $C_{\infty h}$  состоит из пяти инвариантов  $J_1, J_2, J_3, J_4, J_5$  плюс еще один “простой” инвариант  $Y$ . Последний инвариант  $Y = 1$ , если  $J_6 \geq 0$ , и  $Y = -1$ , если  $J_6 < 0$ .

Заметим, что функциональный базис для группы  $C_{\infty h}$  имеет более простую структуру, чем целый рациональный базис инвариантов.

Рассмотрим физический смысл того, что для двух возможных трансверсально-изотропных функций симметричного тензора второго ранга скалярный базис инвариантов состоит из разного числа величин.

Пусть в некоторой точке тела, имеющего симметрию структуры  $D_{\infty h}$ , напряженное состояние определяется тензором напряжений  $\sigma$ . Вырежем в окрестности рассматриваемой точки кубический элемент. Оси системы прямоугольных координат  $0X_1X_2X_3$  направлены по ребрам элемента. Причем элемент материала вырезан так, что ось  $0X_3$  совпадает с осью трансверсальной изотропии. Оси  $0X_1$  и  $0X_2$  направлены таким образом, что компонента напряжений  $\sigma_{12} = 0$ . Для любого тензора  $\sigma$  такую систему координат всегда можно найти [13], поэтому напряженное состояние рассматриваемого элемента, показанное на рис. 2, а, относится к самому общему случаю.

Изменим направление компоненты напряжений  $\sigma_{23}$  на противоположное. Элемент материала при таком напряженном состоянии показан на рис. 2, б. Значения инвариантов  $I_1, \dots, I_5$  для напряженных состояний, показанных на рис. 2, а и б, одинаковы. Повернув элемент, изображенный на рис. 2, б, вокруг оси  $0X_2$  на  $180^\circ$ , его можно совместить с элементом, показанным на рис. 2, а. При этом и структура материала, и компоненты напряжений совпадут.

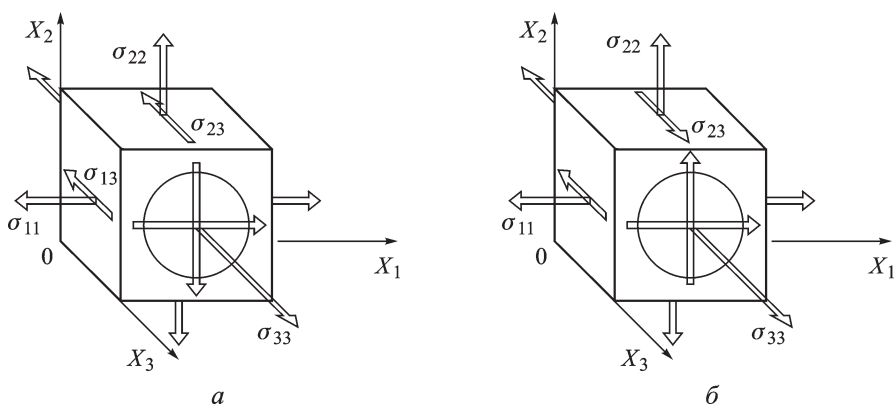


Рис. 2. Нагружение материала, имеющего группу симметрии структуры  $D_{\infty h}$

Рассмотрим два кубических элемента одного и того же материала с симметрией структуры  $C_{\infty h}$  при одном и том же напряженном состоянии. Элементы вырезаны таким же образом, как и в случае материала с симметрией структуры  $D_{\infty h}$ . Эти элементы показаны на рис. 3, а и б. Отличие между рисунками заключается в том, что структура элемента, показанного на рис. 3, б, развернута на  $180^\circ$  по отношению к элементу, изображенному на рис. 3, а. Поэтому, если смотреть со стороны положительных значений оси  $OX_3$  на кубический элемент (см. рис. 3, а), армирующие “рулоны” завернуты в правую сторону, а на рис. 3, б — в левую. Напряженное состояние обоих элементов одинаково, а деформированное состояние в общем случае различно. Изменим у элемента, показанного на рис. 3, б, направление компоненты  $\sigma_{23}$  на противоположное. Получаем напряженное состояние, приведенное на рис. 3, в. Для случая, изображенного на рис. 3, б, имеем

$$J_6 = \sigma_{13}\sigma_{23}(\sigma_{11} - \sigma_{22}). \quad (16)$$

Когда изменяется направление напряжений  $\sigma_{23}$  (см. рис. 3, в), то знак  $J_6$  меняется на противоположный. Значения инвариантов  $J_1, J_2, J_3, J_4, J_5$  одинаковы для элементов, показанных на рис. 3, б и в.

Элемент (см. рис. 3, в) эквивалентен элементу, приведенному на рис. 3, а. Действительно, развернув элемент (см. рис. 3, в) на  $180^\circ$  вокруг оси  $OX_2$ , его можно совместить с элементом на рис. 3, а. При

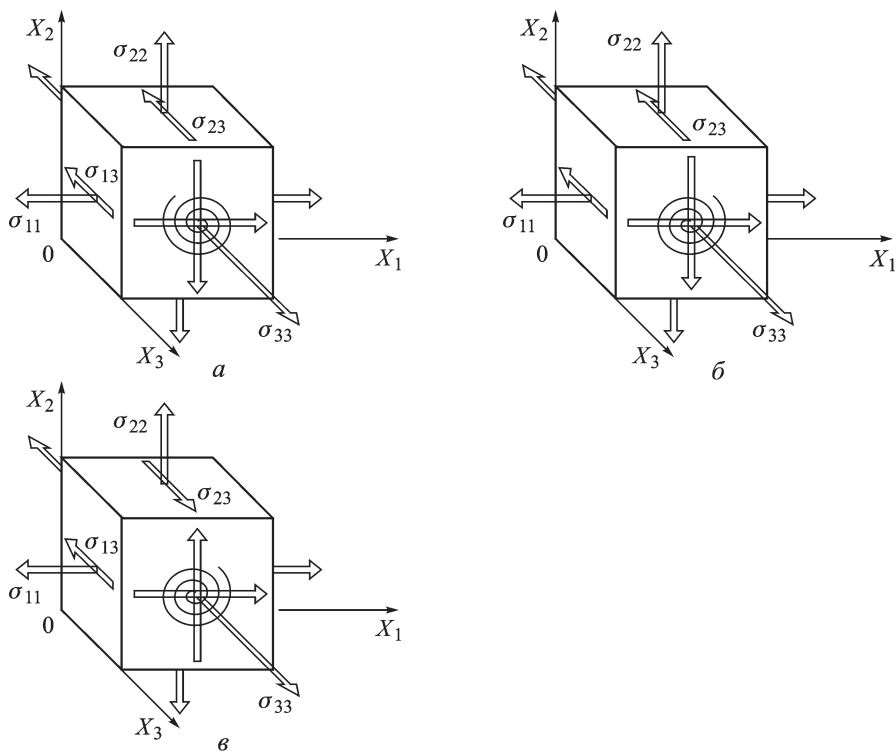


Рис. 3. Нагружение материала, имеющего группу симметрии структуры  $C_{\infty}$

этом совпадут и структура материала, и компоненты напряжений. Таким образом, есть два возможных положения структуры материала симметрии  $C_{\infty h}$  относительно приложенных напряжений и знак инварианта  $J_6$  характеризует это положение. Для материала с симметрией структуры  $D_{\infty h}$  такой особенности не существует.

Теперь, пусть в некоторой точке трансверсально-изотропного тела, все механические свойства которого известны, задано напряженное состояние тензором  $\sigma$ . Этот тензор имеет три независимые компоненты напряжений. Например, он может быть задан тремя главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , и он принимает их в главной системе координат  $OXYZ$ . Для того чтобы найти какую-либо скалярную функцию, определяемую тензором  $\sigma$  (например, выражение для критерия прочности), необходимо кроме главных напряжений задать еще положение оси трансверсальной изотропии относительно системы координат  $OXYZ$ . Для тела с симметрией структуры  $D_{\infty h}$  достаточно задать два параметра. Это углы, которые составляют ось трансверсальной изотропии и оси  $OX$  и  $OY$ . Таким образом, если тело имеет симметрию структуры  $D_{\infty h}$ , скалярная функция будет определяться пятью величинами. Если структура тела имеет симметрию  $C_{\infty h}$ , то кроме этих пяти величин необходимо определить одно из двух возможных положений элементов структуры материала.

**Вывод.** Для трансверсально-изотропных материалов, имеющих группы симметрии структуры  $D_{\infty h}, D_{\infty}, C_{\infty v}$ , самый общий вид критерия прочности следующий:

$$f(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5) = 1. \quad (17)$$

Для трансверсально-изотропных материалов, имеющих группы симметрии структуры  $C_{\infty}$  и  $C_{\infty h}$ , критерий прочности имеет вид

$$f(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, Y) = 1, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr } \sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}; \\ I_2 &= \text{tr } \sigma^2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2); \\ I_3 &= \text{tr } \sigma^3 = \sigma_{11}^3 + \sigma_{22}^3 + \sigma_{33}^3 + 3\sigma_{11}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) + \\ &\quad + 3\sigma_{22}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2) + 3\sigma_{33}(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) + 6\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23}; \\ I_4 &= \text{tr } \mathbf{M}\sigma = \sigma_{33}; \end{aligned} \quad (19)$$

$$I_5 = \text{tr } \mathbf{M}\sigma^2 = \sigma_{33}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2;$$

$$Y = 1, \text{ если } -\sigma_{12}\sigma_{13}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}\sigma_{23} + \sigma_{11}\sigma_{13}\sigma_{23} + \sigma_{12}\sigma_{23}^2 \geq 0,$$

и

$$Y = -1, \text{ если } -\sigma_{12}\sigma_{13}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}\sigma_{23} + \sigma_{11}\sigma_{13}\sigma_{23} + \sigma_{12}\sigma_{23}^2 < 0.$$

Для трансверсально-изотропных материалов, имеющих симметрию структуры  $C_\infty$  и  $C_{\infty h}$ , полученный вид критерия прочности более простой, чем предлагается в работе [6] и, следовательно, для экспериментального определения критерия для конкретного материала требуется меньшее число экспериментов.

## Приложение

### Доказательство соотношения (сизигии)

$$[2J_3 + 4(J_1 + J_4)^3 - 6(J_1 + J_4)(J_5 + J_2) - 3J_4J_5 - J_4^3]^2 + 9[J_5 + J_2 - (J_1 + J_4)^2]^2 [J_4^2 + 2J_2 + 4J_5 - 2(J_1 + J_4)^2] + 36J_6^2 = 0.$$

Убедимся в справедливости следующего положения: если имеют место следующие алгебраические соотношения:

$$a + b = M, \quad (1)$$

$$ab = N, \quad (2)$$

$$c + d = P, \quad (3)$$

$$cd = Q, \quad (4)$$

$$ac + bd = R, \quad (5)$$

то

$$(2R - MP)^2 = (P^2 - 4Q)(M^2 - 4N). \quad (6)$$

Это можно установить непосредственной проверкой (подстановкой).

Для вывода сизигии воспользуемся компонентным методом [8]. Будем выражать инварианты через компоненты симметричного тензора второго ранга  $\sigma_{ij}$  в декартовом базисе  $\bar{e}_i$ . Этот базис выбираем следующим образом: направление  $\bar{e}_3$  совпадает с осью трансверсальной изотропии, а направления  $\bar{e}_2$  и  $\bar{e}_3$  таковы, что компонента  $\sigma_{12} = 0$ . Очевидно, что для любого симметричного тензора второго ранга такой базис можно найти. Поэтому, если установить связь между инвариантами в этом базисе, то эта связь будет справедлива и для любого другого базиса.

В рассматриваемом базисе выражения для инвариантов имеют вид:

$$J_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}; \quad (7)$$

$$J_2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2); \quad (8)$$

$$J_3 = \sigma_{11}^3 + \sigma_{22}^3 + \sigma_{33}^3 + 3\sigma_{11}\sigma_{13}^2 + 3\sigma_{22}\sigma_{23}^2 + 3\sigma_{33}(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2); \quad (9)$$

$$J_4 = -\sigma_{11} - \sigma_{22}; \quad (10)$$

$$J_5 = -\sigma_{11}^2 - \sigma_{22}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2; \quad (11)$$

$$J_6 = \sigma_{13}\sigma_{23}(\sigma_{11} - \sigma_{22}). \quad (12)$$

Находим

$$J_1 + J_4 = \sigma_{33}; \quad (13)$$

$$J_2 - (J_1 + J_4)^2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 2(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2); \quad (14)$$

$$J_4^2 = \sigma_{11}^2 + 2\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2; \quad (15)$$

$$J_5 + J_2 - (J_1 + J_4)^2 = \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2; \quad (16)$$

$$J_6^2 = \sigma_{13}^2\sigma_{23}^2(\sigma_{11}^2 - 2\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2) = \\ = \sigma_{13}^2\sigma_{23}^2[-2J_2 - 4J_5 - J_4^2 + 2(J_1 + J_4)^2]; \quad (17)$$

$$J_3 - (J_1 + J_4)^3 - 3(J_1 + J_4)[J_5 + J_2 - (J_1 + J_4)^2] = \\ = \sigma_{11}^3 + \sigma_{22}^3 + 3\sigma_{11}\sigma_{13}^2 + 3\sigma_{22}\sigma_{23}^2; \quad (18)$$

$$(-J_4)[-J_2 - 2J_5 + (J_1 + J_4)^2] = (\sigma_{11} + \sigma_{22})(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2) = \\ = \sigma_{11}^3 + \sigma_{22}^3 + \sigma_{11}\sigma_{22}(\sigma_{11} + \sigma_{22}); \quad (19)$$

$$[J_4^2 + J_2 + 2J_5 - (J_1 + J_4)^2]J_4 = -2\sigma_{11}\sigma_{22}(\sigma_{11} + \sigma_{22}). \quad (20)$$

Из соотношений (19) и (20) находим

$$\sigma_{11}^3 + \sigma_{22}^3 = (-J_4)[-J_2 - 2J_5 + (J_1 + J_4)^2] + (1/2)[J_4^2 + J_2 + 2J_5 - \\ - (J_1 + J_4)^2]J_4 = (3/2)J_4[J_2 + 2J_5 - (J_1 + J_4)^2] + (1/2)J_4^3; \quad (21)$$

из (10) —

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = -J_4; \quad (22)$$

из соотношений (14), (15) и (13) находим

$$\sigma_{11}\sigma_{22} = (1/2)[J_4^2 + J_2 + 2J_5 - (J_1 + J_4)^2]; \quad (23)$$

из (15) —

$$\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 = J_5 + J_2 - (J_1 + J_4)^2; \quad (24)$$

из (16) —

$$\sigma_{13}^2\sigma_{23}^2 = J_6^2/[-2J_2 - 4J_5 - J_4^2 + 2(J_1 + J_4)^2]; \quad (25)$$

из соотношений (17) и (21) находим

$$\sigma_{11}\sigma_{13}^2 + \sigma_{22}\sigma_{23}^2 = (1/6)\{2J_3 - 2(J_1 + J_4)^3 - 6(J_1 + J_4)[J_5 + J_2 - \\ - (J_1 + J_4)^2] - 3J_4[J_2 + 2J_5 - (J_1 + J_4)^2] - J_4^3\}. \quad (26)$$

Система из пяти уравнений (22)–(26) аналогична по своей структуре системе из пяти уравнений (1)–(5), если произвести замену  $\sigma_{11} = a$ ,  $\sigma_{22} = b$ ,  $\sigma_{13}^2 = d$ ,  $\sigma_{23}^2 = d$ , а также

$$M = -J_4; \quad (27)$$

$$N = 1/2[J_4^2 + J_2 + 2J_5 - (J_1 + J_4)^2]; \quad (28)$$

$$P = J_5 + J_2 - (J_1 + J_4)^2; \quad (29)$$

$$Q = J_6^2/[-2J_2 - 4J_5 - J_4^2 + 2(J_1 + J_4)^2]; \quad (30)$$

$$R = 1/6\{2J_3 - 2(J_1 + J_4)^3 - 6(J_1 + J_4)[J_5 + J_2 - (J_1 + J_4)^2] - \\ - 3J_4[J_2 + 2J_5 - (J_1 + J_4)^2] - J_4^3\}. \quad (31)$$

Подставляя выражения (27)–(31) в (6), получаем нужное соотношение:

$$[2J_3 + 4(J_1 + J_4)^3 - 6(J_1 + J_4)(J_5 + J_2) - 3J_4J_5 - J_4^3]^2 + 9[J_5 + J_2 - (J_1 + J_4)^2]^2[J_4^2 + 2J_2 + 4J_5 - 2(J_1 + J_4)^2] + 36J_6^2 = 0. \quad (32)$$

Выражение (32) можно проверить и непосредственной подстановкой выражений для инвариантов. Сделать это вручную – трудная задача. Для этого можно использовать пакет Mathcad.

Если за функциональный базис принять систему из инвариантов  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ , соотношение (32) приобретет следующий вид:

$$[2I_3 + 4I_4 - 6I_4I_5 - 3(I_4 - I_1)(I_5 - I_2) - (I_4 - I_1)^3]^2 + 9[I_5 - I_4^2]^2[(I_4 - I_1)^2 + 2I_2 + 4(I_5 - I_2) - 2I_4^2] + 36I_6^2 = 0.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сиротин Ю. И., Шаскольская М. П. Основы кристаллофизики, – М.: Наука, 1979. – 680 с.
2. Ву Э. М. Феноменологические критерии разрушения анизотропных сред // Композиционные материалы. Т. 2: Механика композиционных материалов / Под ред. Дж. Сендечки. – М.: Мир. 1978. – С. 401–491.
3. Зиновьев П. А., Цветков С. В. Инвариантно-полиномиальный критерий прочности анизотропных материалов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1994. – № 4. – С. 140–147.
4. Зиновьев П. А., Кулиш Г. Г., Цветков С. В. Процессы деформирования и разрушения композиционных материалов при высокоинтенсивном трехосном нагружении. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. – 95 с.
5. Победря Б. Е. Критерий прочности однонаправленного волокнистого композита // Проблемы прочности. – 1987. – № 7. – С. 3–4.
6. Brühns O., Xiaoh N., Meyers A. On representations of yield functions for crystals, quasicrystals, and transversely isotropic solids // Eur. J. Mech. A/Solids. – Vol. 18. – 1999. – P. 47–67.
7. Zheng Q.-S. Theory of representation of tensor functions. – An unified invariant approach to constitutive equations // Appl. Mech. Rev. – Vol. 44. – No. 11. – November 1994. – P. 545–587.
8. Дмитриенко Ю. И. Тензорное исчисление. – М.: Высш. шк., 2001. – 575 с.
9. Boehler J. P. A simple derivation of representations for non-polynomial constitutive equations in some case of anisotropy // ZAMM. – 59. – 1979. – P. 157–167.
10. Шубников А. В. О симметрии векторов и тензоров // Изв. АН СССР. – 1949. – Т. 13. – № 3. – С. 347–375.
11. Smith G. F. On isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors // Int. J. Eng. Sci. – Vol. 9. – P. 899–916.
12. Pennisi S., Trovato M. On the irreducibility of professor G.F. Smith's representations for isotropic functions // Int. J. Eng. Sci. – 1987. – Vol. 25. – No. 8. – P. 1059–1065.
13. Феодосьев В. И. Соппротивление материалов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 591 с.

Статья поступила в редакцию 21.05.2008