

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОЦЕНОК МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ КОМПОЗИТА. ИЗОТРОПНЫЕ ШАРОВЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ

В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин, И.Ю. Савельева

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация

e-mail: fn2@bmstu.ru

Проведен сравнительный количественный анализ оценок упругих свойств композита с изотропными шаровыми включениями. Рассмотрены различные подходы к построению математических моделей напряженно-деформированного состояния в композите, позволяющие построить двусторонние границы значений модулей упругости и оценить наибольшую возможную погрешность вычисления этих значений. С применением метода самосогласования получены расчетные зависимости, устанавливающие связь упругих характеристик композита с объемной концентрацией включений и упругими свойствами включений и матрицы. Результаты расчетов сопоставлены с известными экспериментальными данными по измерению продольного модуля упругости композита с матрицей из кобальта, упрочненной дисперсными частицами карбида вольфрама.

Ключевые слова: композит, изотропные шаровые включения, модули упругости, двусторонние оценки, метод самосогласования.

COMPARATIVE ANALYSIS ESTIMATES OF ELASTIC MODULI FOR COMPOSITE. ISOTROPIC SPHERICAL INCLUSIONS

V.S. Zarubin, G.N. Kuvyrkin, I.Yu. Savel'eva

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

e-mail: fn2@bmstu.ru

A comparative quantitative analysis of the estimates of elastic characteristics of composite with isotropic spherical inclusions has been carried out. Various approaches to the mathematical model-building of stress-strain state in the composite which allow to build bilateral boundary values of the elastic moduli and evaluate the maximum possible error of calculation of these values have been considered. Calculated dependences, which establish connection of the composite elastic characteristics with the volume concentration of inclusions and elastic properties of the matrix and inclusions, have been obtained using the method of self-consistency. The calculation results have been compared with known experimental measurements of the longitudinal modulus of the composite with a matrix of cobalt, reinforced with dispersed particles of tungsten carbide.

Keywords: composite, isotropic spherical inclusions, elastic moduli, bilateral estimates, method of self-consistency.

Оценку упругих характеристик композита по известным свойствам его матрицы и армирующих включений можно получить, используя различные подходы [1–9]. Рассмотрим такие оценки для достаточно простого случая шаровых изотропных включений в изотропную матрицу композита. Если все включения одинакового размера, то при их наиболее плотной упаковке, когда в каждом слое центры контактирующих между собой шаров находятся в вершинах правильных треугольников, объемная концентрация C_V шаровых включений принимает наибольшее значение: $C_V^* = \pi/(3\sqrt{2}) \approx 0,7405$ [10]. Однако

большинство подходов к оценке упругих свойств композитов с шаровыми включениями не учитывает конкретный размер включений и их расположение. Для удобства сравнения различных оценок будем считать, что включения могут иметь размеры от некоторого конечного до бесконечно малого, т.е. возможно заполнение всех пустот между включениями и поэтому $C_V \in [0, 1]$.

Полагаем известными объемные модули K° , K^\bullet и модули сдвига G° , G^\bullet соответственно матрицы и включений. Расположение включений принимаем случайным, что позволит считать композит макроскопически изотропным, оцениваемые упругие свойства которого определяются объемным модулем K и модулем сдвига G . Через эти модули можно выразить продольный модуль упругости (модуль Юнга) $E = 9KG/(3K+G)$ и коэффициент Пуассона $\nu = 1/2 - 3G/(6K+2G)$ композита [11].

Основные соотношения. Упругие характеристики включений, матрицы и композита в целом можно представить в одинаковой тензорной форме [6] (на примере характеристик композита):

$$\hat{C} = 3K\hat{V} + 2G\hat{D}, \quad \hat{S} = 1/(3K)\mathbf{V} + 1/(2G)\hat{D}, \quad (1)$$

где \hat{C} и \hat{S} — тензоры четвертого ранга коэффициентов упругости и податливости, а \hat{V} и \hat{D} — тензоры четвертого ранга, являющиеся соответственно объемной и девиаторной составляющими единичного тензора четвертого ранга $\hat{I} = \hat{V} + \hat{D}$. Если использовать единичный тензор второго ранга с компонентами δ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$), то компоненты этих составляющих примут вид

$$V_{ijmn} = \delta_{ij}\delta_{mn}/3, \quad D_{ijmn} = (\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})/2 - V_{ijmn}, \quad m, n = 1, 2, 3.$$

С учетом этих формул, правил суммирования слагаемых по повторяющимся в сомножителях латинским индексам и равенств $\delta_{ii} \equiv 3$ можно установить, что [6] $V_{ijmn}V_{mnlk} = V_{ijkl}$, $D_{ijmn}D_{mnlk} = D_{ijkl}$ и $V_{ijmn}D_{mnlk} = 0$, $k, l = 1, 2, 3$, т.е.

$$\hat{V} \cdot \cdot \hat{V}, \quad \hat{D} \cdot \cdot \hat{D} = \hat{D}, \quad \hat{V} \cdot \cdot \hat{D} = \hat{O}_4, \quad (2)$$

где \hat{O}_4 — тензор четвертого ранга с нулевыми компонентами, а каждая из точек между сомножителями в произведении тензоров означает свертывание по индексу, одинаковому в обоих сомножителях [12].

Тензоры \hat{V} и \hat{D} и представленные через них в формулах (1) тензоры \hat{C} и \hat{S} являются изотропными, т.е. их компоненты не зависят от ориентации осей выбранной системы прямоугольных декартовых координат.

Выделим в рассматриваемом композите некоторый представительный объем V , осредненные параметры которого отражают свойства этого композита в целом. Осредненные по объему V композита параметры будем заключать в угловые скобки. Осредненные тензоры

второго ранга напряжений $\hat{\sigma}$ и деформации $\hat{\varepsilon}$ соответственно

$$\langle \hat{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \hat{\sigma} dV \quad \text{и} \quad \langle \hat{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \hat{\varepsilon} dV$$

связаны искомыми тензорами коэффициентов упругости \hat{C} или податливости \hat{S} соответственно:

$$\langle \hat{\sigma} \rangle = \hat{C} \cdot \cdot \langle \hat{\varepsilon} \rangle \quad \text{или} \quad \langle \hat{\varepsilon} \rangle = \hat{S} \cdot \cdot \langle \hat{\sigma} \rangle, \quad (3)$$

которые в данном случае принято называть эффективными, как и модули упругости K и G , через которые, согласно формулам (1), их можно выразить.

Для композита в силу его неоднородности локальные значения каждого из тензоров $\hat{\sigma}(M)$ и $\hat{\varepsilon}(M)$ в окрестности точки $M \in V$ можно представить суммой осредненной и флуктуационной составляющих [6], т.е. $\hat{\sigma}(M) = \langle \hat{\sigma} \rangle + \hat{\sigma}'(M)$ и $\hat{\varepsilon} = \langle \hat{\varepsilon} \rangle + \hat{\varepsilon}'(M)$. Тогда локальная связь между этими тензорами с использованием закона Гука примет вид (обозначение точки $M \in V$ опущено)

$$\langle \hat{\sigma} \rangle + \hat{\sigma}' = (\langle \hat{C}_* \rangle + \hat{C}_*') \cdot \cdot (\langle \hat{\varepsilon} \rangle + \hat{\varepsilon}'), \quad \langle \hat{\varepsilon} \rangle + \hat{\varepsilon}' = (\langle \hat{S}_* \rangle + \hat{S}_*') \cdot \cdot (\langle \hat{\sigma} \rangle + \hat{\sigma}'),$$

где $\langle \hat{C}_* \rangle$, $\langle \hat{S}_* \rangle$ и \hat{C}_*' , \hat{S}_*' – осредненные и флуктуационные составляющие тензоров коэффициентов соответственно упругости и податливости в объеме V , компоненты которых зависят от локальных значений модулей упругости матрицы композита и включений. Если провести осреднение этих соотношений, то с учетом равенств $\langle \hat{\sigma}' \rangle = 0$ и $\langle \hat{\varepsilon}' \rangle = 0$ получим

$$\langle \hat{\sigma} \rangle = \langle \hat{C}_* \rangle \cdot \cdot \langle \hat{\varepsilon} \rangle + \langle \hat{C}_*' \rangle \cdot \cdot \hat{\varepsilon}', \quad \langle \hat{\varepsilon} \rangle = \langle \hat{S}_* \rangle \cdot \cdot \langle \hat{\sigma} \rangle + \langle \hat{S}_*' \rangle \cdot \cdot \hat{\sigma}'. \quad (4)$$

Из сопоставления соотношений (3) и (4) следует, что $\langle \hat{C}_* \rangle \neq \hat{C}$ и $\langle \hat{S}_* \rangle \neq \hat{S}$, т.е. осредненные тензоры коэффициентов упругости и податливости в общем случае не совпадают с тензорами эффективных коэффициентов соответственно упругости и податливости композита. Если в первом приближении принять линейные соотношения $\hat{\varepsilon}' = \hat{P} \cdot \cdot \langle \hat{\varepsilon} \rangle$ и $\hat{\sigma}' = \hat{Q} \cdot \cdot \langle \hat{\sigma} \rangle$, то из формул (3) и (4) получим $\hat{C} = \langle \hat{C}_* \rangle + \langle \hat{C}_*' \rangle \cdot \cdot \hat{P}$ и $\hat{S} = \langle \hat{S}_* \rangle + \langle \hat{S}_*' \rangle \cdot \cdot \hat{Q}$. Нахождение поправок $\langle \hat{C}_*' \rangle \cdot \cdot \hat{P}$ и $\langle \hat{S}_*' \rangle \cdot \cdot \hat{Q}$ к осредненным значениям тензоров \hat{C}_* и \hat{S}_* является существенно более сложной задачей по сравнению с процедурой осреднения этих тензоров. Пути нахождения таких поправок и составляют особенности различных подходов к оценке упругих свойств композитов. Но сначала целесообразно рассмотреть процедуру осреднения свойств включений и матрицы.

Осреднение упругих свойств включений и матрицы. Наиболее простой подход, дающий возможность оценить упругие свойства композита с изотропными включениями любой формы, связан с применением соотношений теории смесей [13], что позволяет для оценок модулей упругости записать

$$\tilde{K}_+ = K_+/K^\circ = 1 - C_V + \bar{K}C_V, \quad \tilde{G}_+ = G_+/G^\circ = 1 - C_V + \bar{G}C_V, \quad (5)$$

где $\bar{K} = K^\bullet/K^\circ$ и $\bar{G} = G^\bullet/G^\circ$. Идентичные оценки можно получить осреднением напряжений в неоднородной линейно упругой изотропной среде, используя предположение, выдвинутое в 1910 г. В. Фойгтом, об однородности ее деформированного состояния.

Модули упругости характеризуют жесткостные свойства материала, а свойства упругой податливости материала определяют величины, обратные этим модулям. Тогда для оценок характеристик упругой податливости в рамках моделей теории смесей получаем

$$1/\tilde{K}_- = K^\circ/K_- = 1 - C_V + C_V/\bar{K}, \quad 1/\tilde{G}_- = G^\circ/G_- = 1 - C_V + C_V/\bar{G}. \quad (6)$$

Такие же оценки следуют из выдвинутого в 1929 г. А. Рейссом предположения об однородности напряженного состояния неоднородной среды, если провести осреднение деформации, считая среду изотропной и линейно упругой.

Нижние индексы “+” и “-” в формулах (5) и (6) указывают на то, что справедливы неравенства $\tilde{K}_+ \geq \bar{K}_-$ и $\tilde{G}_+ \geq \bar{G}_-$. Действительно, из этих формул, например, для оценок модуля сдвига следует

$$\tilde{G}_+ - \tilde{G}_- = (\bar{G} - 1)^2(1 - C_V)C_V / (\bar{G}(1 - C_V) + C_V) \geq 0, \quad (7)$$

поскольку значение дроби в средней части этого соотношения при положительном знаменателе и неотрицательном числителе также будет неотрицательным. Эта дробь равна нулю при $\bar{G} = 1$, а также при $C_V = 0$ и $C_V = 1$, т.е. в случае однородного материала, когда оценки G_+ и G_- совпадают между собой и с эффективным значением G модуля сдвига композита. Такой же результат справедлив и для разности $\tilde{K}_+ - \tilde{K}_-$.

В работах [14, 15] показано, что для представительного объема V неоднородной среды, размеры которого существенно превосходят размеры неоднородностей, потенциальную энергию деформации допустимо представить через осредненные компоненты тензоров напряжений и деформации, т.е.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V \hat{\sigma}^* \cdot \cdot \hat{\varepsilon}^* dV &= \frac{1}{2} \int_V \hat{\varepsilon}^* \cdot \cdot \hat{C} \hat{\varepsilon}^* dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \hat{\sigma}^* \cdot \cdot \hat{S} \cdot \cdot \hat{\sigma}^* dV = \frac{V}{2} \langle \hat{\sigma} \rangle \cdot \cdot \langle \hat{\varepsilon} \rangle, \quad (8) \end{aligned}$$

где тензоры $\hat{\sigma}^*$ и $\hat{\varepsilon}^*$ соответствуют истинному напряженно-деформированному состоянию среды, удовлетворяющему условиям равновесия и совместности деформаций. Из сопоставления левой и правой частей цепочки равенств (8) следует, что принятое допущение основано на пренебрежении слагаемым $\langle \hat{\sigma}' \rangle \cdot \cdot \langle \hat{\varepsilon}' \rangle$ по сравнению с $\langle \hat{\sigma} \rangle \cdot \cdot \langle \hat{\varepsilon} \rangle$. Это допущение позволяет показать, что оценки (5) и (6) являются двусторонними по отношению к эффективным значениям K и G модулей упругости рассматриваемого композита.

При отсутствии объемных сил и задании на поверхности объема V кинематических граничных условий функционал Лагранжа, достигающий минимума на истинном распределении перемещений в замкнутой области $\bar{V} = V \cup S$ [16], совпадает со второй частью цепочки равенств (8). Этот функционал допустимо рассматривать на непрерывных и кусочно-дифференцируемых по пространственным координатам распределениях перемещений, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям. Тогда при допустимом однородном деформированном состоянии, определяемом тензором $\hat{\varepsilon}_0 = \langle \hat{\varepsilon} \rangle$, с учетом равенств (4) и (8) можно записать

$$\frac{1}{2} \int_V \hat{\varepsilon}_0 \cdot \cdot \mathbf{C}_* \cdot \cdot \hat{\varepsilon}_0 dV \geq \frac{1}{2} \int_V \hat{\varepsilon}^* \cdot \cdot \mathbf{C}_* \cdot \cdot \hat{\varepsilon}^* dV = \frac{V}{2} \langle \hat{\sigma} \rangle \cdot \cdot \langle \hat{\varepsilon} \rangle = \frac{V}{2} \hat{\varepsilon}_0 \cdot \cdot \mathbf{C} \cdot \cdot \hat{\varepsilon}_0.$$

Отсюда последовательно получим неравенства

$$\int_V (\hat{\mathbf{C}}_* - \hat{\mathbf{C}}) dV \geq \hat{\mathbf{O}}_4, \quad \int_V \hat{\mathbf{V}} \cdot \cdot (\hat{\mathbf{C}}_* - \hat{\mathbf{C}}) dV \geq 0, \quad \int_V \hat{\mathbf{D}} \cdot \cdot (\hat{\mathbf{C}}_* - \hat{\mathbf{C}}) dV \geq 0.$$

Из второго и третьего неравенств с учетом первой формулы (1) и равенств (2) следует $K^\circ(1 - C_V) + K^\bullet C_V \geq K$ и $G^\circ(1 - C_V) + G^\bullet C_V \geq G$, что, согласно формулам (5), равносильно неравенствам $K_+ \geq K_*$ и $G_+ \geq G_*$, т.е. значения K_+ и G_+ действительно являются верхними оценками соответственно для K и G .

Аналогичным путем можно показать, что значения K_- и G_- являются нижними оценками эффективных значений K и G . Для этого достаточно рассмотреть представительный объем V композита с силовыми граничными условиями на его поверхности. Тогда третья часть цепочки равенств (8), взятая с обратным знаком, совпадет с функционалом Кастилиано, достигающим максимума на истинном распределении напряжений в замкнутой области \bar{V} [16]. Этот функционал допустимо рассматривать на статически возможных распределениях напряжений. При допустимом однородном напряженном состоянии, определяемом тензором $\hat{\sigma}_0 = \langle \hat{\sigma} \rangle$, с учетом равенств (4) и (8) запишем

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \int_V \hat{\sigma}_0 \cdot \hat{S}_* \cdot \hat{\sigma}_0 dV &\leq -\frac{1}{2} \int_V \hat{\sigma}^* \cdot \hat{S}_* \cdot \hat{\sigma}^* dV = \\
 &= -\frac{V}{2} \langle \hat{\sigma} \rangle \cdot \langle \hat{\varepsilon} \rangle = -\frac{V}{2} \hat{\sigma}_0 \cdot \hat{S}_* \cdot \hat{\sigma}_0.
 \end{aligned}$$

Отсюда последовательно получим неравенства

$$\int_V (\hat{S}_* - \hat{S}) dV \geq O_4, \quad \int_V \hat{V} \cdots (\hat{S}_* - \hat{S}) dV \geq 0, \quad \int_V \hat{D} \cdots (\hat{S}_* - \hat{S}) dV \geq 0.$$

Из второго и третьего неравенств с учетом второй формулы (1) и равенств (2) следует $(1 - C_V)/K^\circ + C_V/K^\bullet \geq 1/K$ и $(1 - C_V)/G^\circ + C_V/G^\bullet \geq 1/G$, что, согласно формулам (6), равносильно неравенствам $K_- \leq K_*$ и $G_- \leq G_*$, т.е. значения K_- и G_- , действительно, являются нижними оценками эффективных значений соответствующих модулей упругости композита.

Если в качестве первого приближения к эффективным значениям K и G принять средние арифметические полученных оценок, то каждая полуразность $\Delta \bar{K} = (\bar{K}_+ - \bar{K}_-)/2$ и $\Delta \bar{G} = (\bar{G}_+ - \bar{G}_-)/2$ будет характеризовать наибольшую возможную относительную погрешность такого приближения. Используя формулу (7), находим, что разность $\Delta \bar{G}$ достигает максимального значения $\Delta \bar{G}_{\max} = (1 - \sqrt{\bar{G}})^2/2$ при объемной концентрации включений $C_V^{(G)} = \sqrt{\bar{G}}/(1 + \sqrt{\bar{G}})$. На рис. 1 в полулогарифмических координатах приведены графики зависимостей

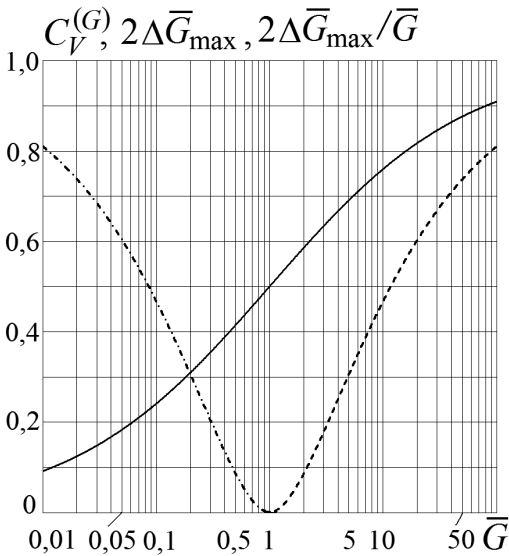


Рис. 1. Зависимости от параметра \bar{G} :

сплошная кривая — объемная концентрация $C_V^{(G)}$ включений; штрихпунктирная — $2\Delta\bar{G}_{\max}$ при $\bar{G} \leq 1$; штриховая — $2\Delta\bar{G}_{\max}/\bar{G}$ при $\bar{G} \geq 1$

$C_V^{(G)}$ (сплошная кривая), $2\Delta\bar{G}_{\max}$ при $\bar{G} \leq 1$ (штрихпунктирная линия) и $2\Delta\bar{G}_{\max}/\bar{G}$ при $\bar{G} \geq 1$ (штриховая линия) от \bar{G} . Ясно, что графики зависимостей $C_V^{(K)}$, $2\Delta\bar{K}_{\max}$ и $2\Delta\bar{K}_{\max}/\bar{K}$ от \bar{K} идентичны приведенным на этом рисунке.

Сближение двусторонних оценок. В работе [17] предложен вариационный принцип, позволяющий сбить двусторонние оценки упругих модулей неоднородного материала, которые (как и оценки, определяемые формулами (5) и (6), не учитывают конкретную форму включений. Соотношение для каждой такой уточненной оценки можно представить в виде разности верхней оценки M_+ оцениваемого модуля упругости (объемного модуля K или модуля сдвига G) и положительной поправки, которая в общем случае зависит от объемного модуля и модуля сдвига как включения, так и матрицы. Эти поправки в случае оценки безразмерного объемного модуля K/K° композита имеют вид [6]

$$\begin{aligned}\Delta\bar{K}_1 &= \frac{(\bar{K} - 1)^2 C_V (1 - C_V)}{\bar{K}(1 - C_V) + C_V + 4\bar{G}^\circ/3}, \\ \Delta\bar{K}_2 &= \frac{(\bar{K} - 1)^2 C_V (1 - C_V)}{\bar{K}(1 - C_V) + C_V + 4\bar{G}\bar{G}^\circ/3},\end{aligned}\tag{9}$$

где $\bar{G}^\circ = G^\circ/K^\circ$, а для оценки безразмерного модуля сдвига G/G°

$$\Delta\bar{G}_1 = \frac{(\bar{G} - 1)^2 C_V (1 - C_V)}{\bar{G}(1 - C_V) + C_V + \bar{G}_1}, \quad \Delta\bar{G}_2 = \frac{(\bar{G} - 1)^2 C_V (1 - C_V)}{\bar{G}(1 - C_V) + C_V + \bar{G}_2},$$

где $\bar{G}_1 = (9 + 8\bar{G}^\circ)/(6 + 12\bar{G}^\circ)$ и $\bar{G}_2 = \bar{G}(9\bar{K} + 8\bar{G}\bar{G}^\circ)/(6\bar{K} + 12\bar{G}\bar{G}^\circ)$. Формулы для поправок совпадают с соотношениями, получаемыми в рамках обобщенного сингулярного приближения теории случайных функций [6].

Ясно, что меньшая из поправок $\Delta\bar{K}_1$ и $\Delta\bar{K}_2$ (или $\Delta\bar{G}_1$ и $\Delta\bar{G}_2$) позволяет уточнить верхнюю оценку, а бóльшая — нижнюю оценку соответствующего модуля упругости композита. При $K^\bullet \neq K^\circ$ и $G^\bullet = \bar{G}^\circ$ из формул (9) следует $\Delta\bar{K}_1 = \Delta\bar{K}_2$, что приводит к совпадению уточненных верхней и нижней оценок объемного модуля композита, т.е. формально к возможности вычислить истинное значение этого модуля.

На рис. 2 при $\bar{K} = 0,1$ и $\bar{K} = 0,4$ приведены графики зависимостей от C_V двусторонних оценок \bar{K}_+ и \bar{K}_- (штрихпунктирные и штриховые линии), построенные по первым формулам (5) и (6), и графики зависимостей уточненных двусторонних оценок $\bar{K}_+^* = \bar{K}_+ - \min(\Delta\bar{K}_1, \Delta\bar{K}_2)$ и $\bar{K}_-^* = \bar{K}_- + \max(\Delta\bar{K}_1, \Delta\bar{K}_2)$, построенные с учетом формул (9) при $\bar{G}^\circ = 0,4$ и различных значениях \bar{G} (сплошные кривые соответствуют значению $\bar{G} = 1$, штриховые — $\bar{G} = 0,5$, тонкие сплошные линии с кружками — $\bar{G} = 0,3$, со светлыми и темными ромбами — $\bar{G} = 1,5$ и $\bar{G} = 2,5$, с треугольниками и квадратами — $\bar{G} = 5$ и $\bar{G} = 10$).

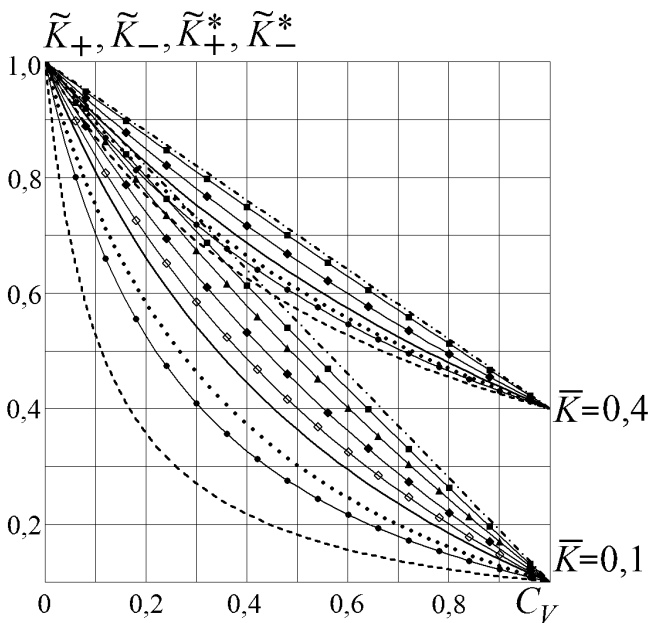


Рис. 2. Зависимости от объемной концентрации C_V включений при $\bar{K} = 0,1$ и $\bar{K} = 0,4$:

штрихпунктирные и штриховые линии – двусторонние оценки $\tilde{K}_+ = K_+/K^\circ$ и $\tilde{K}_- = K_-/K^\circ$; уточненные двусторонние оценки \tilde{K}_+^* и \tilde{K}_-^* при $\bar{G}^\circ = 0,4$ и различных значениях \bar{G} (сплошные кривые – $\bar{G} = 1$, штриховые – $\bar{G} = 0,5$, тонкие сплошные с кружками – $\bar{G} = 0,3$, со светлыми и темными ромбами – $\bar{G} = 1,5$ и $\bar{G} = 2,5$, с треугольниками и квадратами – $\bar{G} = 5$ и $\bar{G} = 10$ соответственно)

Следует отметить, что использование вириального разложения [6] и учет взаимодействия шарового включения с окружающей его матрицей [8, 9] приводят для объемного модуля к формулам, совпадающим с одной из представленных уточненных оценок. При $\bar{K} = 1/0,1 = 10$ и $\bar{K} = 1/0,4 = 2,5$ вид всех графиков на рис. 2 не изменится, если все безразмерные величины нормировать не по K° , а по K^* , и по оси абсцисс вместо C_V отсчитывать величину $1 - C_V$.

При совпадении модулей сдвига матрицы и включений $\Delta\bar{G}_1 = \Delta\bar{G}_2 = 0$, т.е. совпадают уточненные верхняя и нижняя оценки модуля сдвига композита, что (как и в случае с объемным модулем композита) формально равносильно равенству $G = G^\circ = G^*$. Однако при $G^\circ \neq G^*$ эти оценки совпадут лишь при выполнении условия $\bar{G}_1 = \bar{G}_2$, что в общем случае маловероятно. На рис. 3 при $\bar{G} = 0,3$ и $\bar{G} = 0,5$ представлены графики зависимостей от C_V двусторонних оценок \tilde{G}_+ и \tilde{G}_- (штрихпунктирные и штриховые линии соответственно), построенные по вторым формулам (5) и (6), а также графики зависимостей уточненных двусторонних оценок $\tilde{G}_+^* = \tilde{G}_+ - \min(\Delta\bar{G}_1, \Delta\bar{G}_2)$ и $\tilde{G}_-^* = \tilde{G}_+ - \max(\Delta\bar{K}_1, \Delta\bar{K}_2)$, построенные при различных значениях \bar{G}_0 , где \bar{G}_0 может быть равным как \bar{G}_1 , так и \bar{G}_2 (сплошные кривые соответствуют $\bar{G}_0 = 1,1296$, штриховые – $\bar{G}_0 = 0,2735$, со светлыми

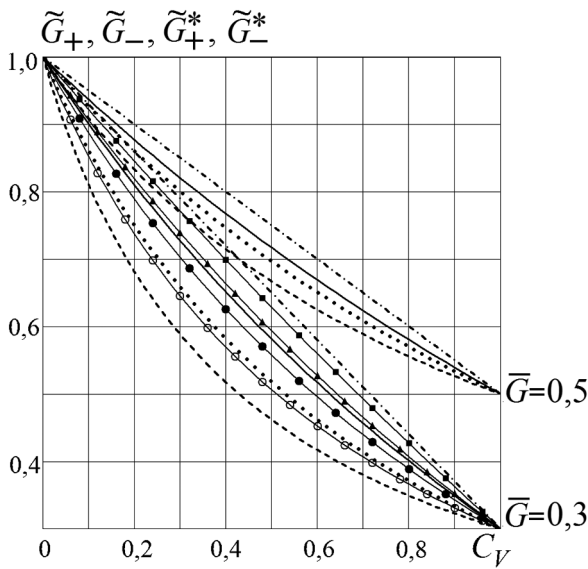


Рис. 3. Зависимости от объемной концентрации C_V включений при $\bar{G} = 0,3$ и $\bar{G} = 0,5$:

штрихпунктирные и штриховые линии – двусторонние оценки $\tilde{G}_+ = G_+/G^\circ$ и $\tilde{G}_- = G_-/G^\circ$; уточненные двусторонние оценки \tilde{G}_+^* и \tilde{G}_-^* при $\bar{G}^\circ = 0,4$ и различных значениях \bar{G}_0 (сплошные кривые – $\bar{G}_0 = 1,1296$, пунктирные – $\bar{G}_0 = 0,2735$, тонкие сплошные со светлыми и темными кружками – $\bar{G}_0 = 0,2$ и $\bar{G}_0 = 2/3$, с треугольниками и квадратами – $\bar{G}_0 = 1,5$ и $\bar{G}_0 = 5$ соответственно)

и темными кружками – $\bar{G}_0 = 0,2$ и $\bar{G}_0 = 2/3$, с треугольниками и квадратами – $\bar{G}_0 = 1,5$ и $\bar{G}_0 = 5$). В случае $\bar{G} = 1/0,3 = 10/3$ и $\bar{G} = 1/0,5 = 2$ все графики сохраняют свой вид, если все безразмерные величины нормировать вместо G° по G^* , а по оси абсцисс вместо C_V отсчитывать величину $1 - C_V$. Отметим, что полученная путем вириального разложения [6] формула для модуля сдвига композита совпадает с формулой для одной из уточненных оценок этого модуля.

Метод самосогласования. Особенность построения оценки упругих характеристик композита с шаровыми включениями методом самосогласования состоит в учете взаимодействия отдельно взятого элемента неоднородности (включения или частицы матрицы) с однородной изотропной средой, имеющей искомые оцениваемые модули упругости [1]. Последующее осреднение по объему композита возмущений распределения параметров в этих элементах позволяет получить расчетные зависимости для искомых упругих характеристик композита.

Сначала рассмотрим упругое взаимодействие изотропного шарового включения с занимающей неограниченную область окружающей средой из того же линейно упругого материала с тензором \hat{C} коэффициентов упругости. Пусть исходные однородные деформированное и напряженное состояния окружающей среды вместе с этим включением определяют тензоры деформации $\hat{\epsilon}_0$ и напряжений $\hat{\sigma}_0 \hat{C} \cdot \hat{\epsilon}_0$.

Если мысленно извлечь включение из окружающей среды и без изменения его напряженного состояния создать в нем дополнительную деформацию, определяемую тензором $\hat{\varepsilon}''$, то после возвращения включения на прежнее место его деформированное состояние будет определять сумма тензоров $\hat{\varepsilon}_0 + \hat{\varepsilon}^*$, причем $\hat{\varepsilon}'' = \hat{\mathbf{W}} \cdot \hat{\varepsilon}^*$, где [6]

$$\hat{\mathbf{W}} = 3(1 - \nu)\hat{\mathbf{V}}/(1 + \nu) + (15/2)(1 - \nu)\hat{\mathbf{D}}/(4 - 5\nu), \quad (10)$$

а $\nu = 1/2 - 3G/(6K + 2G)$ — коэффициент Пуассона окружающей среды. При этом напряженное состояние включения будет характеризовать тензор

$$\hat{\sigma}^* = \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot (\hat{\varepsilon}_0 + \hat{\varepsilon}^* - \hat{\varepsilon}'') = \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot (\hat{\varepsilon}_0 + \hat{\varepsilon}^*) - \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \hat{\mathbf{W}} \cdot \cdot \hat{\varepsilon}^*. \quad (11)$$

Теперь заменим шаровое включение таким же включением, но свойства которого определяет тензор $\hat{\mathbf{C}}^*$ коэффициентов упругости реального включения в рассматриваемом композите. При одинаковой деформации в прежнем и новом включениях в последнем возникнет напряженное состояние, определяемое тензором

$$\hat{\sigma}_1^* = \hat{\mathbf{C}}^* \cdot \cdot (\hat{\varepsilon}_0 + \hat{\varepsilon}^*). \quad (12)$$

Такая замена будет эквивалентна, если напряжения в прежнем и новом включениях совпадут. Тогда, приравняв правые части равенств (11) и (12), найдем тензор $\hat{\varepsilon}^* = \hat{\mathbf{u}}^* \cdot \cdot \hat{\varepsilon}_0$, характеризующий возмущение деформации реального включения относительно однородного деформированного состояния композита, где

$$\hat{\mathbf{u}}^* = (\hat{\mathbf{C}}^* - \hat{\mathbf{C}} + \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \hat{\mathbf{W}})^{-1} \cdot \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \hat{\mathbf{W}} - \hat{\mathbf{I}}, \quad (13)$$

и тензор избыточных напряжений $\Delta\hat{\sigma}^* = \hat{\sigma}^* - \hat{\sigma}_0 = \hat{\mathbf{v}}^* \hat{\varepsilon}_0$, где с учетом формул (11) и (13)

$$\hat{\mathbf{v}}^* = (\hat{\mathbf{C}} - \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \hat{\mathbf{W}}) \cdot \cdot \hat{\mathbf{u}}^*. \quad (14)$$

Форма частиц матрицы, связывающей в композите шаровые включения, при хаотическом расположении включений является неопределенной. Примем в качестве средней статической форму этих частиц шаровой. Взаимодействие шаровой частицы матрицы с изотропной окружающей средой будут определять соотношения, аналогичные полученным ранее для шарового включения, а именно возмущение деформации в такой частице будет определять тензор $\hat{\varepsilon}^\circ = \hat{\mathbf{u}}^\circ \cdot \cdot \hat{\varepsilon}_0$, где

$$\hat{\mathbf{u}}^\circ = (\hat{\mathbf{C}}^\circ - \hat{\mathbf{C}} + \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \hat{\mathbf{W}})^{-1} \cdot \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \hat{\mathbf{W}} - \hat{\mathbf{I}}, \quad (15)$$

а избыточные напряжения в этой частице — тензор $\Delta\hat{\sigma}^\circ = \hat{\sigma}^\circ - \hat{\sigma}_0 = \hat{\mathbf{v}}^\circ \hat{\varepsilon}_0$, где

$$\hat{\mathbf{v}}^\circ = (\hat{\mathbf{C}} - \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \hat{\mathbf{W}}) \cdot \cdot \hat{\mathbf{u}}^\circ. \quad (16)$$

Осреднение по объему композита возмущений деформации и напряжений по всем включениям и частицам матрицы должно, согласно

методу самосогласования, привести к нулевому результату, т.е.

$$\langle \hat{\varepsilon}^\circ \rangle (1 - C_V) + \langle \hat{\varepsilon}^\bullet \rangle C_V = \hat{\mathbf{O}}_2, \quad \langle \Delta \hat{\sigma}^\circ \rangle (1 - C_V) + \langle \Delta \hat{\sigma}^\bullet \rangle C_V = \hat{\mathbf{O}}_2, \quad (17)$$

где $\hat{\mathbf{O}}_2$ — тензор второго ранга с нулевыми компонентами. Все тензоры второго ранга, входящие в левые части этих равенств, включают один и тот же множитель $\hat{\varepsilon}_0$, определяющий макроскопически однородное деформированное состояние композита. Поэтому при осреднении этот множитель можно опустить и перейти к осреднению тензоров четвертого ранга, определенных формулами (13)–(16):

$$\langle \hat{\mathbf{u}}^\circ \rangle (1 - C_V) + \langle \hat{\mathbf{u}}^\bullet \rangle C_V = \hat{\mathbf{O}}_4, \quad \langle \hat{\mathbf{v}}^\circ \rangle (1 - C_V) + \langle \hat{\mathbf{v}}^\bullet \rangle C_V = \hat{\mathbf{O}}_4. \quad (18)$$

Тензоры $\hat{\mathbf{v}}^\circ$ и $\hat{\mathbf{v}}^\bullet$ по сравнению соответственно с тензорами $\hat{\mathbf{u}}^\circ$ и $\hat{\mathbf{u}}^\bullet$ имеют одинаковый дополнительный множитель $\hat{\mathbf{C}} - \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{W}}$. Поэтому осреднение левых частей обоих равенств (17) даст одинаковый результат, т.е. достаточно осреднить более простые по структуре тензоры $\hat{\mathbf{u}}^\circ$ и $\hat{\mathbf{u}}^\bullet$.

В формулы (13) и (15) входит внутреннее произведение изотропных тензоров $\hat{\mathbf{C}}$ и $\hat{\mathbf{W}}$. С учетом формул (1), (2) и (11) получим

$$\hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{W}}^\circ = 9K \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \hat{\mathbf{V}} + 15G \frac{1 - \nu}{4 - 5\nu} \hat{\mathbf{D}}.$$

Тогда, продолжив преобразования, вместо формулы (13) с учетом зависимости ν от K и G запишем

$$\hat{\mathbf{u}}^\bullet = \left(\frac{3K + 4G}{3K^\bullet + 4G} - 1 \right) \hat{\mathbf{V}} + \left(\frac{5G(3K + 4G)}{6G^\bullet(K + 2G) + G(9K + 8G)} - 1 \right) \hat{\mathbf{D}},$$

а вместо формулы (15) —

$$\hat{\mathbf{u}}^\circ = \left(\frac{3K + 4G}{3K^\circ + 4G} - 1 \right) \hat{\mathbf{V}} + \left(\frac{5G(3K + 4G)}{6G^\circ(K + 2G) + G(9K + 8G)} - 1 \right) \hat{\mathbf{D}}.$$

Из этих формул следует, что тензоры четвертого ранга, входящие в первое равенство (17), являются изотропными. Операция осреднения таких тензоров в левой части этого равенства равносильна с учетом равенства $\hat{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{V}} + \hat{\mathbf{D}}$ объединению коэффициентов при изотропных тензорах $\hat{\mathbf{V}}$ и $\hat{\mathbf{D}}$. В итоге получаем систему двух алгебраических уравнений относительно искомых модулей K и G :

$$\begin{aligned} \frac{(3K + 4G)(1 - C_V)}{3K^\circ + 4G} + \frac{(3K + 4G)C_V}{3K^\bullet + 4G} &= 1, \\ \frac{5G(3K + 4G)(1 - C_V)}{6G^\circ(K + 2G) + G(9K + 8G)} + \frac{5G(3K + 4G)C_V}{6G^\bullet(K + 2G) + G(9K + 8G)} &= 1. \end{aligned} \quad (19)$$

На рис. 4 квадраты и ромбы соответствуют значениям отношений $\tilde{K} = K/K^\circ$ и $\tilde{G} = G/G^\circ$, следующим из решения системы уравнений

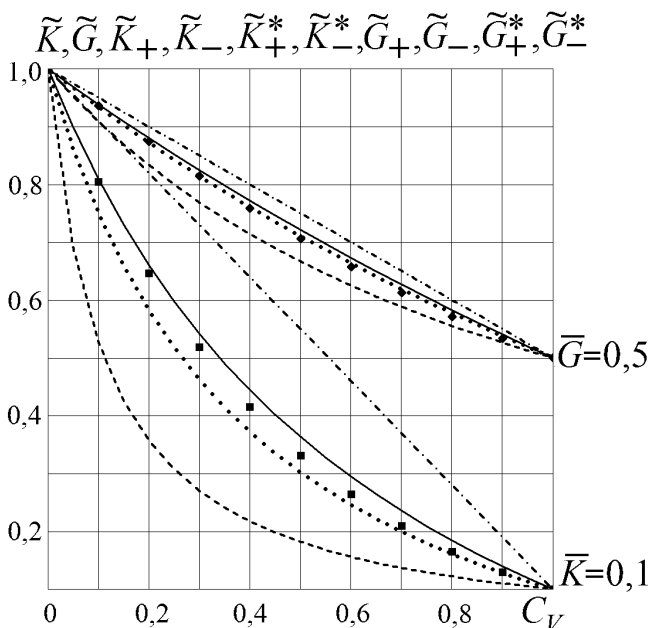


Рис. 4. Зависимости от объемной концентрации C_V включений при $\bar{K} = 0,1$, $\bar{G} = 0,5$ и $\bar{G}^\circ = 0,4$:

квадраты и ромбы — соответственно значения $\tilde{K} = K/K^\circ$ и $\tilde{G} = G/G^\circ$, полученные из решения системы уравнений (18); штрихпунктирные и штриховые линии — двусторонние оценки; сплошные и штриховые кривые — уточненные двусторонние оценки

(18). Решение получено при значениях параметров $\bar{K} = K^\bullet/K^\circ = 0,1$, $\bar{G} = G^\bullet/G^\circ = 0,5$ и $\bar{G}^\circ = 0,4$, а кривые повторяют зависимости, представленные на рис. 2 и 3 при тех же значениях параметров. Если график зависимости \tilde{K} от C_V расположен полностью в полосе между кривыми для оценок \tilde{K}_+^* и \tilde{K}_-^* , то график зависимости \tilde{G} при $C_V > 0,4$ выходит за пределы полосы между соответствующими кривыми для оценок \tilde{G}_+^* и \tilde{G}_-^* . Для сравнения на рис. 5 приведены аналогичные графики, соответствующие значениям параметров $\bar{K} = 0,1$, $\bar{G} = 0,3$ и $\bar{G}^\circ = 0,4$. В этом случае график зависимости \tilde{G} от C_V выходит за пределы полосы между кривыми для оценок \tilde{G}_+^* и \tilde{G}_-^* при $C_V > 0,2$.

Сравнение с экспериментом. В работах [18, 19] приведены экспериментальные данные по измерению продольного модуля упругости E композита, матрицей которого является кобальт Со, упрочненной дисперсными частицами карбида вольфрама WC. Предполагая форму частиц близкой к шаровой, проведем сравнение этих данных с результатами расчетов по представленным зависимостям.

Матрица одного из композитов имеет значения $K^\circ = 172,4$ ГПа и $G^\circ = 79,3$ ГПа, а частицы WC — $K^\bullet = 418,5$ ГПа и $G^\bullet = 288,2$ ГПа [18]. Этим значениям соответствуют продольные модули упругости $E^\circ = 206,2$ ГПа и $E^\bullet = 703,2$ ГПа. На рис. 6 ординаты светлых кружков равны отношению $\hat{E} = E/E^\bullet$; где E — измеренное значение про-

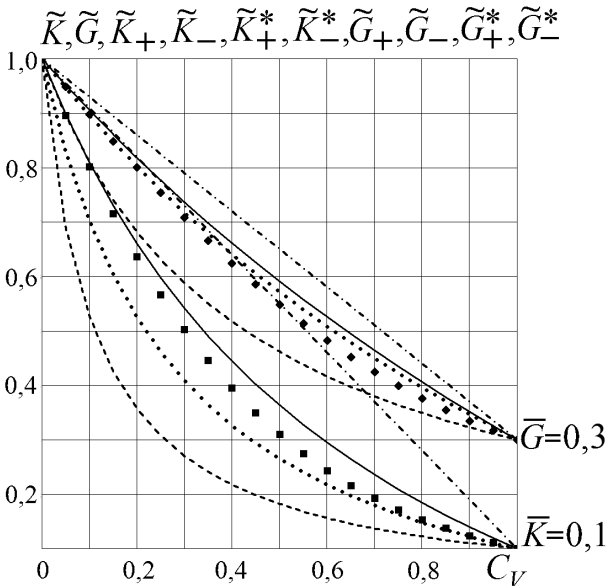


Рис. 5. Зависимости от объемной концентрации C_V включений при $\bar{K} = 0,1$, $\bar{G} = 0,3$ и $\bar{G}^\circ = 0,4$ (обозначения см. рис. 4)

дольного модуля упругости, а абсциссы — объемной концентрации C_V частиц WC в композите. Штрихпунктирная и штриховая линии характеризуют зависимости $\hat{E}_+ = E_+/E^\bullet$ и $\hat{E}_- = \bar{E}_-/E^\bullet$ от C_V и построены с применением формул (5) и (6), тонкая сплошная и пунктирная линии для зависимостей $\hat{E}_+^* = E_+^*/E^\bullet$ и $\hat{E}_-^* = E_-^*/E^\bullet$ от C_V — по уточненным двусторонним оценкам, а толстая сплошная кривая — с использованием метода самосогласования. За исключением результата измерения при $C_V = 0,78$ остальные экспериментальные данные лежат в полосе, ограниченной уточненными двусторонними оценками, при $C_V < 0,6$ практически совпадают с результатами расчетов методом самосогласования, а при $C_V > 0,6$ лежат ниже соответствующей кривой.

Для экспериментальных образцов другого композита известны значения $K^\circ = 183,4$ ГПа, $G^\circ = 79,3$ ГПа и $K^\bullet = 384,0$ ГПа, $G^\bullet = 297,9$ ГПа [19], что соответствует значениям $E^\circ = 207,9$ ГПа и $E^\bullet = 710,0$ ГПа. Результаты измерений для этих образцов отмечены на рис. 6 темными кружками с абсциссами, равными объемному содержанию $C_V^\circ = 1 - C_V$ матрицы в композите. В данном случае экспериментальные результаты также лежат в полосе между уточненными двусторонними оценками (тонкая сплошная и пунктирная линии) и достаточно близки к результатам, полученным методом самосогласования (толстая сплошная кривая).

Выводы. Представленные оценки упругих свойств композита с изотропными шаровыми включениями дают возможность сравнить эффективность различных подходов к построению математических

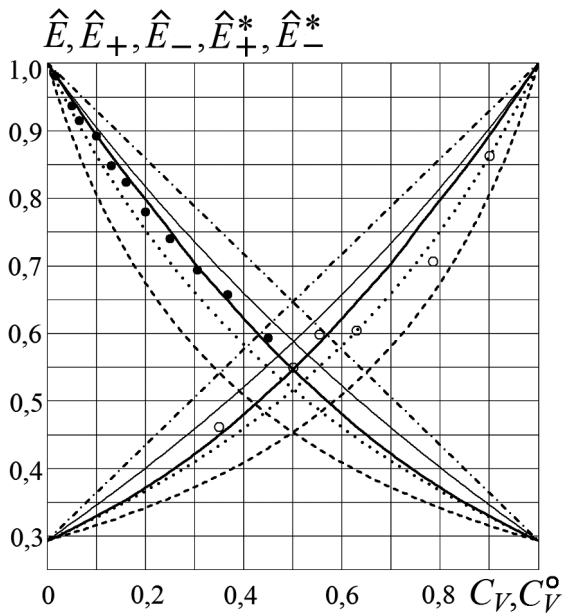


Рис. 6. Зависимости относительного значения продольного модуля упругости композита от объемной концентрации C_V включений карбида вольфрама при $E^* = 703,2$ ГПа (при $C_V = 1$ все значения равны единице) и от объемного содержания $C_V^{\circ} = 1 - C_V$ матрицы из кобальта при $E^* = 71,0$ ГПа (при $C^{\circ} = 0$ все значения равны единице):

толстые сплошные кривые — отношения $\hat{E} = E/E^*$, полученные из решения системы уравнений (18); светлые и темные кружки — экспериментальные данные из работ [18, 19] соответственно; штрихпунктирные и штриховые линии — двусторонние оценки; тонкие сплошные и штриховые кривые — уточненные двусторонние оценки

моделей взаимодействия включений и матрицы композита. Наличие двусторонних оценок модулей позволяет установить не только границы возможного изменения значений модулей упругости композита, но и оценить наибольшую погрешность, которая может возникнуть при вычислении этих значений. Проведено количественное сравнение двусторонних оценок с результатами, полученными с применением метода самосогласования. Сопоставление результатов расчетов дало приемлемое согласование с известными экспериментальными данными для композита с матрицей из кобальта, упрочненной частицами карбида вольфрама.

Работа выполнена по гранту НШ-1432.2014.8 программы Президента РФ государственной поддержки ведущих научных школ и гранту МК-6618.2013.8 программы Президента РФ государственной поддержки молодых кандидатов наук.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций / пер. с англ. М.: ИЛ, 1963. 248 с.

2. Hashin Z. Theory of mechanical behaviour of heterogeneous media // *Appl. Mech. Rev.* 1964. Vol. 17. No. 1. P. 1–10.
3. Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials // *J. Mech. Phys. Solids.* 1965. Vol. 13. No. 4. P. 21–222.
4. Хорощун Л.П. О методе определения упругих модулей армированных тел // *Механика полимеров.* 1968. № 1. С. 78–87.
5. Yeh R.H.T. Variational principles of elastic moduli of composite materials // *J. Appl. Phys.* 1970. Vol. 41. No. 8. P. 3353–3356.
6. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
7. *Механика композиционных материалов* / ред. Дж. Сендецки: пер. с англ. М.: Мир, 1978. 564 с.
8. Кристенсен Р. Введение в механику композитов / пер. с англ. М.: Мир, 1982. 336 с.
9. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наук. думка, 1985. 304 с.
10. Шаскольская М.С. Кристаллография. М.: Высш. шк., 1976. 392 с.
11. Зарубин В.С. Прикладные задачи термпрочности элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1985. 296 с.
12. Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление. М.: Высш. шк., 2001. 576 с.
13. Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Смесевые модели механики композитов. Ч. 1. Термомеханика и термоупругость многокомпонентной смеси // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки.* 2009. № 3. С. 36–49.
14. Hill R. The elastic behaviour of a crystalline aggregates // *Proceedings of Physical Society.* 1952. Vol. A65. No. 389. P. 349–354.
15. *Введение в микромеханику* / под ред. М. Онами: пер. с япон. М.: Metallurgy, 1987. 280 с.
16. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
17. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials // *J. Mech. Phys. Solids.* 1963. V. 11. No. 2. P. 127–140.
18. Nishimatsu C., Gurland J. Experimental survey of the deformation of the hard-ductile two-phase alloy system W–Co // *Trans. Amer. Soc. Metals.* 1960. V. 52. No. 2. P. 469–484.
19. Doi H., Fujiwara Y., Miyake K., Oosawa Y. A systematic investigation of elastic moduli of W–Co alloys // *Met. Trans.* 1970. V. 1. No. 5. P. 1417–1425.

REFERENCES

- [1] Eshelby J. D., Seitz F., Turnbull D., eds. The continuum theory of lattice defects. In *Collected Works of J.D. Eshelby* “Progress in Solid State Physics”, New York, Academic Press Publ., 1956, vol. 3, pp. 79–303.
- [2] Hashin Z. Theory of mechanical behaviour of heterogeneous media. *Appl. Mech. Rev.* 1964, vol. 17, iss. 1, pp. 1–10.
- [3] Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 1965, vol. 13, iss. 4, pp. 21–22.
- [4] Khoroshun L.P. A method of determining elastic moduli of reinforced bodies. *Mekh. Polim.* [Polymer Mechanics], 1968, no. 1, pp. 78–87 (in Russ.).
- [5] Yeh R.H.T. Variational principles of elastic moduli of composite materials. *J. Appl. Phys.*, 1970, vol. 41, iss. 8, pp. 3353–3356.
- [6] Shermergor T.D. Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred [The theory of elasticity of micro-inhomogeneous media]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 400 p.

- [7] Brautman L. Kroc R., Sendetsky J., eds. Composite Materials. In 8 volumes. Vol. 2. Mechanics of Composite Materials. N.Y., 1975. (Russ. Ed.: Brautman L. Kroc R. Mekhanika kompozitsionnykh materialov. Pod red. Dzh. Sendetski; per. s angl. Moscow, Mir Publ., 1978. 564 p.).
- [8] Christensen R.M. Mechanics of composite materials. N.Y., Wiley-Interscience Publ., 1979. 348 p. (Russ. ed.: Kristensen R.M. Vvedenie v mekhaniku kompozitov. Moscow, Mir, 1982. 334 p.).
- [9] Vanin G.A. Mikromekhanika kompozitsionnykh materialov [Micromechanics of composite materials]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1985. 304 p.
- [10] Shaskol'skaya M.S. Kristallografiya [Crystallography]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1976. 392 p.
- [11] Zarubin V.S. Prikladnye zadachi termoprochnosti elementov konstruksiy [Applied problems of thermal strength of elements of designs]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1985. 296 p.
- [12] Dimitrienko Yu.I. Tenzornoe ischislenie [Tensor calculus]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 2001. 576 p.
- [13] Golovin N.N., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Mixture models of composite mechanics. P. 1. Thermal mechanics and thermoelasticity of multicomponent mixture. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.], 2009, no. 3, pp. 36–49 (in Russ.).
- [14] Hill R. The elastic behaviour of a crystalline aggregates. *Proceedings of Physical Society*, 1952, vol. A65 349, pp. 349–354. DOI:10.1088/0370-1298/65/5/307
- [15] Onami M., eds. Vvedenie v mikromekhaniku [Introduction to micro-mechanics]. Trans. from Japanese. Moscow, Metallurgiya, 1987. 280 p.
- [16] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy [Mathematical models of mechanics and electro-dynamics of continuous media]. Moscow, MGTU im. N.E. Baumana Publ., 2008. 512 p.
- [17] Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 1963, vol. 11, iss. 2, pp. 127–140.
- [18] Nishimatsu C., Gurland J. Experimental survey of the deformation of the hard-ductile two-phase alloy system W-Co. *Trans. Amer. Soc. Metals*, 1960, vol. 52, iss. 2, pp. 469–484.
- [19] Doi H., Fujiwara Y., Miyake K., Oosawa Y. A systematic investigation of elastic moduli of W-Co alloys. *Met. Trans*, 1970, vol. 1, iss. 5, pp. 1417–1425.

Статья поступила в редакцию 27.01.2014

Зарубин Владимир Степанович — д-р техн. наук, профессор кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 250 научных работ в области математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Zarubin V.S. — Dr. Sci. (Eng.), professor of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 250 publications in the field of mathematical simulation of thermomechanical processes in materials and construction members.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Кувыркин Георгий Николаевич — д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 160 научных работ в области прикладной математики и математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Kuvyrkin G.N. — Dr. Sci. (Eng.), professor, head of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 160 publications in the field of applied mathematics and mathematical simulation of thermomechanical processes in materials and construction members.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Савельева Инга Юрьевна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 10 научных работ в области моделирования нестационарной теплопроводности.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Savel'eva I.Yu. — assoc. professor of the “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 10 publications in the field of simulation of nonstationary heat conductivity.

Bauman Moscow State Technical University, Vtoraya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.