

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОЦЕНОК МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ КОМПОЗИТА. АНИЗОТРОПНЫЕ ШАРОВЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ****В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин, И.Ю. Савельева**МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация  
e-mail: fn2@bmstu.ru

*Проведен сравнительный количественный анализ оценок упругих свойств композита с анизотропными шаровыми включениями, имеющими различные упругие характеристики. Рассмотрен вариационный подход к построению двусторонних границ значений модулей упругости композита, позволяющий оценить наибольшую возможную погрешность вычисления этих значений. Методом самосогласования получена система нелинейных алгебраических уравнений, устанавливающая связь упругих характеристик композита с объемной концентрацией включений и упругими свойствами включений и матрицы. Показана возможность учета влияния пористости композита на значения его модулей упругости. Проведено сопоставление результатов расчетов при различной пористости композита с матрицей из кобальта, упрочненной дисперсными частицами карбида вольфрама, с известными экспериментальными данными по измерению продольного модуля упругости такого композита, применяемого при изготовлении металлорежущего и бурового инструмента и для создания износостойких покрытий.*

**Ключевые слова:** композит, анизотропные шаровые включения, модули упругости, двусторонние оценки, метод самосогласования.

**COMPARATIVE ANALYSIS MODULUS ELASTICITY ESTIMATES FOR COMPOSITE ANISOTROPIC SPHERICAL INCLUSIONS****V.S. Zarubin, G.N. Kuvyrkin, I.Yu. Savel'eva**Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation  
e-mail: fn2@bmstu.ru

*A comparative quantitative analysis of elastic properties estimates of a composite with anisotropic spherical inclusions that has different elastic characteristics is carried out. The article considers the variational approach in order to build bilateral boundaries values of the elastic moduli of the composite that allows to estimate the greatest possible error of calculation for these value. With the help of the method of self-consistency a system of nonlinear algebraic equations is obtained. This system establishes connection of the composite elastic characteristics with the volumetric concentration of inclusions and elastic properties of the matrix and of the inclusions. The opportunity of taking into account the influence of porosity on value of the composite elastic moduli is shown. The authors carried out comparison of the calculations results of elastic properties for the composite with different porosity and a matrix made of cobalt, reinforced with dispersed particles of tungsten carbide, with known experimental data on the measurement of the longitudinal elastic modulus of the composite used in the manufacture of cutting and drilling tools and creating and wear-resistant coatings.*

**Keywords:** composite, anisotropic spherical inclusions, elastic moduli, bilateral estimates, method of self-consistency.

В отличие от первой части работы, посвященной сравнительному количественному анализу подходов к оценке упругих характеристик

композита с изотропными шаровыми включениями из одного материала, в этой части рассмотрены анизотропные включения из различных материалов. Примем, что включения могут иметь размеры от некоторого конечного до бесконечно малого, т. е. возможно заполнение всех пустот между включениями и поэтому объемная концентрация  $C_V$  включений может принимать любые значения на отрезке  $[0; 1]$ .

**Основные соотношения.** Пусть композит состоит из изотропной линейно упругой матрицы, свойства которой характеризуют объемный модуль  $K^\circ$  упругости и модуль сдвига  $G^\circ$ , и линейно упругих анизотропных шаровых включений  $N$  типов с объемной концентрацией  $C_V^{(\varsigma)}$ ,  $\varsigma = \overline{1, N}$ . Заданные упругие характеристики включений каждого типа определяют тензоры  $\widehat{\mathbf{C}}^{(\varsigma)}$  и  $\widehat{\mathbf{S}}^{(\varsigma)}$  коэффициентов упругости и податливости соответственно. Примем, что главные оси этих тензоров для каждого типа включений равновероятно распределены по всем возможным направлениям. Это означает, что композит не обладает текстурой и допустимо рассматривать его некоторый представительный объем  $V$ , по отношению к которому композит можно считать изотропным.

Искомые упругие свойства композита представим тензорами четвертого ранга коэффициентов упругости и податливости соответственно:

$$\widehat{\mathbf{C}} = 3K\widehat{\mathbf{V}} + 2G\widehat{\mathbf{D}}, \quad \widehat{\mathbf{S}} = 1/(3K)\widehat{\mathbf{V}} + 1/(2G)\widehat{\mathbf{D}}, \quad (1)$$

где  $K$  — объемный модуль упругости,  $G$  — модуль сдвига, а  $\widehat{\mathbf{V}}$  и  $\widehat{\mathbf{D}}$  — тензоры четвертого ранга, являющиеся соответственно объемной и девиаторной составляющими единичного тензора четвертого ранга  $\widehat{\mathbf{I}} = \widehat{\mathbf{V}} + \widehat{\mathbf{D}}$ . Компоненты этих составляющих, определенные в прямоугольной системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , имеют вид [ 1 ]

$$V_{ijmn} = \delta_{ij}\delta_{mn}/3,$$

$$D_{ijmn} = (\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})/2 - V_{ijmn}, \quad i, j, m, n = 1, 2, 3,$$

где  $\delta_{ij}$  — компоненты единичного тензора второго ранга (символ Кронекера:  $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$  и  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ ). Из этих формул с учетом правила суммирования слагаемых по повторяющимся в сомножителях латинских индексах и равенства  $\delta_{ii} = 3$  следует  $V_{ijmn}V_{mnlk} = V_{ijkl}$ ,  $D_{ijmn}D_{mnlk} = D_{ijkl}$  и  $V_{ijmn}D_{mnlk} = 0$ ,  $k, l = 1, 2, 3$ , т. е.

$$\widehat{\mathbf{V}} \cdot \widehat{\mathbf{V}} = \widehat{\mathbf{V}}, \quad \widehat{\mathbf{D}} \cdot \widehat{\mathbf{D}} = \widehat{\mathbf{D}}, \quad \widehat{\mathbf{V}} \cdot \widehat{\mathbf{D}} = \widehat{\mathbf{O}}_4, \quad (2)$$

где  $\widehat{\mathbf{O}}_4$  — тензор четвертого ранга с нулевыми компонентами, а каждая из точек между сомножителями в произведении тензоров означает свертывание по индексу, одинаковому в обоих сомножителях [ 2 ].

Заданные упругие характеристики изотропной матрицы можно представить аналогично формулам (1) тензорами четвертого ранга

$$\widehat{\mathbf{C}}^\circ = 3K^\circ \widehat{\mathbf{V}} + 2G^\circ \widehat{\mathbf{D}}, \quad \widehat{\mathbf{S}}^\circ = 1/(3K^\circ) \widehat{\mathbf{V}} + 1/(2G^\circ) \widehat{\mathbf{D}}. \quad (3)$$

Тензор четвертого ранга имеет два линейных инварианта. Для тензоров  $\widehat{\mathbf{V}}$  и  $\widehat{\mathbf{D}}$  с учетом правила суммирования слагаемых по повторяющимся латинским индексам и формул (2) эти инварианты имеют вид  $V_{iimm} = 3$ ,  $V_{imim} = 1$ ,  $D_{iimm} = 0$  и  $D_{imim} = 5$ . Тогда инварианты тензоров  $\widehat{\mathbf{C}}$  и  $\widehat{\mathbf{S}}$  с учетом формул (1) можно представить в виде

$$\widehat{\mathbf{C}} \cdots \widehat{\mathbf{V}} = C_{iimm} = 9K, \quad \widehat{\mathbf{C}} \cdots \widehat{\mathbf{D}} = C_{imim} - C_{iimm}/3 = 10G, \quad (4)$$

$$\widehat{\mathbf{S}} \cdots \widehat{\mathbf{V}} = S_{iimm} = 1/K, \quad \widehat{\mathbf{S}} \cdots \widehat{\mathbf{D}} = S_{imim} - S_{iimm}/3 = 5/(2G), \quad (5)$$

где  $C_{ijmn}$  и  $S_{ijmn}$  — компоненты тензоров  $\widehat{\mathbf{C}}$  и  $\widehat{\mathbf{S}}$  соответственно, определенные в системе координат  $Ox_1x_2x_3$ .

Осредненные по представительному объему  $V$  локальные значения  $\hat{\sigma}(M)$  и  $\hat{\varepsilon}(M)$  тензоров второго ранга соответственно напряжений и деформации в окрестности точки  $M \in V$  имеют вид

$$\langle \hat{\sigma} \rangle = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \hat{\sigma}(M) dV(M) \quad \langle \hat{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \hat{\varepsilon}(M) dV(M),$$

где угловые скобки обозначают операцию осреднения. Модули упругости  $K$  и  $G$  композита, связывающие эти осредненные тензоры и называемые эффективными, определяют тензоры  $\widehat{\mathbf{C}}$  и  $\widehat{\mathbf{S}}$  в формулах (1). Введем эти тензоры из условия равенства объемной плотности потенциальной энергии деформации в изотропной среде и в реальном композите [3]:

$$\frac{1}{2} \langle \hat{\varepsilon} \rangle \cdots \widehat{\mathbf{C}} \cdots \langle \hat{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{2} \langle \hat{\sigma} \rangle \cdots \widehat{\mathbf{S}} \cdots \langle \hat{\sigma} \rangle = \frac{1}{2V} \int_V \hat{\varepsilon}^*(M) \cdots \hat{\sigma}^*(M) dV(M), \quad (6)$$

где  $\hat{\sigma}^*$  и  $\hat{\varepsilon}^*$  — тензоры напряжений и деформации, описывающие истинное напряженно-деформированное состояние в представительном объеме композита, удовлетворяющее условиям равновесия и совместности деформаций. Тензоры  $\widehat{\mathbf{C}}$  и  $\widehat{\mathbf{S}}$ , характеризующие упругие свойства композита, подлежат оценке на основе того или иного подхода.

**Вариационный подход.** При отсутствии объемных сил и задании кинематических граничных условий на поверхности, ограничивающей объем  $V$ , функционал Лагранжа, достигающий минимума на истинном распределении перемещений в замкнутой области  $\bar{V} = V \cup S$ , имеет вид [3, 4]

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_V \hat{\varepsilon}(M) \cdots \widehat{\mathbf{C}}^*(M) \cdots \hat{\varepsilon}(M) dV(M), \quad M \in V, \quad (7)$$

где  $\widehat{\mathbf{C}}^*$  — тензор, соответствующий локальным значениям коэффициентов упругости матрицы и включений в объеме  $V$ . Этот функционал допустимо рассматривать на непрерывных и кусочно дифференцируемых по пространственным координатам распределениях перемещений, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям. Тогда при допустимом однородном деформированном состоянии, определяемом тензором  $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = \langle \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle$  с компонентами  $\varepsilon_{ij} = \text{const}$ , с учетом формул (6) и (7) и равенства  $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^* = \widehat{\mathbf{C}}^* \cdot \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^*$ , опустив обозначение точки  $M \in V$ , можно записать

$$\frac{1}{2} \int_V \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \cdot \widehat{\mathbf{C}}^* \cdot \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 dV \geq \frac{1}{2} \int_V \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \cdot \widehat{\mathbf{C}}^* \cdot \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^* dV = \frac{V}{2} \langle \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \cdot \langle \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle = \frac{V}{2} \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \cdot \widehat{\mathbf{C}} \cdot \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0.$$

Отсюда следует неравенство

$$\frac{1}{V} \int_V \widehat{\mathbf{C}}^*(M) dV(M) \geq \widehat{\mathbf{C}}, \quad M \in V,$$

которое после полной свертки с тензорами  $\widehat{\mathbf{V}}$  и  $\widehat{\mathbf{D}}$  с учетом формул (4) будет эквивалентно двум неравенствам, содержащим линейные инварианты тензоров  $\widehat{\mathbf{C}}^*$  и  $\widehat{\mathbf{C}}$  [3]:

$$\frac{1}{V} \int_V C_{iimm}^*(M) dV(M) \geq 9K,$$

$$\frac{1}{V} \int_V \left( C_{imim}^*(M) - \frac{C_{iimm}^*(M)}{3} \right) dV(M) \geq 10G,$$

где  $C_{ijmn}^*(M)$  — компоненты тензора  $\widehat{\mathbf{C}}^*$ , определенные в системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . Подынтегральные функции в этих неравенствах кусочно постоянны в пределах отдельно взятых включений и в матрице, что позволяет представить верхние оценки  $K_+$  и  $G_+$  соответствующих модулей упругости композита в виде

$$\widetilde{K}_+ = C_V^\circ + \frac{1}{9K^\circ} \sum_{\varsigma=1}^N C_V^{(\varsigma)} C_{iimm}^{(\varsigma)}, \quad \widetilde{G}_+ = C_V^\circ + \frac{1}{10G^\circ} \sum_{\varsigma=1}^N C_V^{(\varsigma)} \left( C_{imim}^{(\varsigma)} - \frac{C_{iimm}^{(\varsigma)}}{3} \right), \quad (8)$$

где  $\widetilde{K}_+ = K_+/K^\circ$ ,  $\widetilde{G}_+ = G_+/G^\circ$ ,  $C_{ijmn}^{(\varsigma)}$  — компоненты тензора  $\widehat{\mathbf{C}}^{(\varsigma)}$ , а  $C_V^\circ$  — объемное содержание матрицы в композите, причем

$$C_V^\circ + \sum_{\varsigma=1}^N C_V^{(\varsigma)} = 1.$$

При отсутствии объемных сил и задании силовых граничных условий на поверхности, ограничивающей объем  $V$ , функционал Касти-

лиано, максимизируемый на истинном распределении напряжений в замкнутой области  $\bar{V}$ , имеет вид [3, 4]

$$J_2 = -\frac{1}{2} \int_V \hat{\sigma}(M) \cdot \hat{S}^*(M) \cdot \hat{\sigma}(M) dV(M), \quad M \in V, \quad (9)$$

где  $\hat{S}^*$  — тензор, соответствующий локальным значениям коэффициентов податливости матрицы и включений в объеме  $V$ . Этот функционал допустимо рассматривать на статически возможных распределениях напряжений. При допустимом однородном напряженном состоянии, определяемом тензором  $\hat{\sigma}_0 = \langle \hat{\sigma} \rangle$  с компонентами  $\sigma_{ij} = \text{const}$ , с учетом формул (6) и (9) и равенства  $\hat{\epsilon}^* = \hat{S}^* \cdot \hat{\sigma}^*$ , опустив обозначение точки  $M \in V$ , получим соотношение

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_V \hat{\sigma}_0 \cdot \hat{S}^* \cdot \hat{\sigma}_0 dV &\leq -\frac{1}{2} \int_V \hat{\sigma}^* \cdot \hat{S}^* \cdot \hat{\sigma}^* dV = \\ &= -\frac{V}{2} \langle \hat{\sigma} \rangle \cdot \langle \hat{\epsilon} \rangle = -\frac{V}{2} \hat{\sigma}_0 \cdot \hat{S} \cdot \hat{\sigma}_0. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство

$$\frac{1}{V} \int_V \hat{S}^*(M) dV(M) \geq \hat{S}, \quad M \in V,$$

которое после полной свертки с тензорами  $\hat{V}$  и  $\hat{D}$  с учетом формул (4) будет эквивалентно двум неравенствам, включающим линейные инварианты тензоров  $\hat{S}^*$  и  $\hat{S}$  [3]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \int_V S_{iimm}^*(M) dV(M) &\geq \frac{1}{K}, \\ \frac{1}{V} \int_V \left( S_{iimim}^*(M) - \frac{S_{iimm}^*(M)}{3} \right) dV(M) &\geq \frac{5}{2G}, \end{aligned}$$

где  $S_{ijmn}^*(M)$  — компоненты тензора  $\hat{S}^*$ , определенные в системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . Подынтегральные функции в этих неравенствах кусочно постоянны в пределах отдельно взятых включений и в матрице, что дает возможность представить нижние оценки  $K_-$  и  $G_-$  соответствующих модулей упругости композита в виде

$$\begin{aligned} \tilde{K}_- &= \left( C_V^o + K^o \sum_{\varsigma=1}^N C_V^{(\varsigma)} S_{iimm}^{(\varsigma)} \right)^{-1}, \\ \tilde{G}_- &= \left( C_V^o + \frac{2G^o}{5} \sum_{\varsigma=1}^N C_V^{(\varsigma)} \left( S_{iimim}^{(\varsigma)} - \frac{S_{iimm}^{(\varsigma)}}{3} \right) \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\tilde{K}_- = K_-/K^o$ ,  $\tilde{G}_- = G_-/G^o$ ,  $S_{ijmn}^{(\varsigma)}$  — компоненты тензора  $\hat{C}^{(\varsigma)}$ .

При существенном различии упругих характеристик матрицы и включений представленные двусторонние оценки могут привести к значительному различию значений, соответствующих верхней и нижней границам. Один из подходов, дающий возможность уточнить упругие характеристики рассматриваемого композита, основан на методе самосогласования [1, 5, 6].

**Метод самосогласования.** Оценка упругих свойств композита с шаровыми включениями методом самосогласования состоит в учете взаимодействия отдельно взятого элемента неоднородности (включения или частицы матрицы) с однородной изотропной средой, имеющей искомые оцениваемые модули упругости [7]. Это позволяет найти отклонения в распределениях деформаций и напряжений в этих элементах относительно однородных распределений в изотропной среде. Последующее осреднение этих отклонений по представительному объему композита приводит к расчетным зависимостям для искомым упругих характеристик.

В силу неопределенности формы частиц матрицы, связывающей в композите шаровые включения при их хаотическом расположении, примем в качестве средней статической эту форму шаровой. Взаимодействие упругой изотропной шаровой частицы матрицы с изотропной окружающей средой с искомыми упругими характеристиками композита определяют соотношения [4]

$$\hat{\varepsilon}^{\circ} = \hat{\mathbf{u}}^{\circ} \cdot \cdot \hat{\varepsilon}_0, \quad \Delta \hat{\sigma}^{\circ} = \hat{\sigma}^{\circ} - \hat{\sigma}_0 = \hat{\mathbf{v}}^{\circ} \hat{\varepsilon}_0, \quad (11)$$

где  $\hat{\varepsilon}^{\circ}$  и  $\Delta \hat{\sigma}^{\circ}$  – тензоры, характеризующие отклонения деформации и напряжений в частице от однородного напряженно-деформированного состояния представительного объема композита (это состояние определяют тензоры  $\hat{\varepsilon}_0$  и  $\hat{\sigma}_0$  соответственно),

$$\hat{\mathbf{u}}^{\circ} = (\hat{\mathbf{C}}^{\circ} - \hat{\mathbf{C}} + \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \hat{\mathbf{W}})^{-1} \cdot \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \hat{\mathbf{W}} - \hat{\mathbf{I}}, \quad \hat{\mathbf{v}}^{\circ} = (\hat{\mathbf{C}} - \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \hat{\mathbf{W}}) \cdot \cdot \hat{\mathbf{u}}^{\circ}, \quad (12)$$

$$\hat{\mathbf{W}} = 3(1 - \nu)\hat{\mathbf{V}}/(1 + \nu) + (15/2)(1 - \nu)\hat{\mathbf{D}}/(4 - 5\nu),$$

а  $\nu = 1/2 - 3G/(6K + 2G)$  – коэффициент Пуассона окружающей среды.

Для анизотропного включения, свойства которого характеризует тензор  $\hat{\mathbf{C}}^{(\zeta)}$  коэффициентов упругости, вместо формул (11) и (12) получим [4]

$$\hat{\varepsilon}^{(\zeta)} = \hat{\mathbf{u}}^{(\zeta)} \cdot \cdot \hat{\varepsilon}_0, \quad \Delta \hat{\sigma}^{(\zeta)} = \hat{\sigma}^{\circ} - \hat{\sigma}_0 = \hat{\mathbf{v}}^{\circ} \hat{\varepsilon}_0, \quad (13)$$

где  $\hat{\varepsilon}^{(\zeta)}$  и  $\Delta \hat{\sigma}^{(\zeta)}$  – тензоры, определяющие отклонения деформации и напряжений во включении с номером типа  $\zeta = \overline{1, N}$  от однородного напряженно-деформированного состояния представительного объема композита,

$$\hat{\mathbf{u}}^{(\zeta)} = (\hat{\mathbf{C}}^{(\zeta)} - \hat{\mathbf{C}} + \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \hat{\mathbf{W}})^{-1} \cdot \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \hat{\mathbf{W}} - \hat{\mathbf{I}}, \quad \hat{\mathbf{v}}^{(\zeta)} = (\hat{\mathbf{C}} - \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \hat{\mathbf{W}}) \cdot \cdot \hat{\mathbf{u}}^{(\zeta)}. \quad (14)$$

Осреднение по объему композита возмущений деформации и напряжений по всем включениям и частицам матрицы должно, согласно методу самосогласования, привести к нулевому результату, т. е.

$$\langle \hat{\varepsilon}^\circ \rangle C_V^\circ + \sum_{\varsigma=1}^N \langle \hat{\varepsilon}^{(\varsigma)} \rangle C_V^{(\varsigma)} = \hat{\mathbf{O}}_2, \quad \langle \Delta \hat{\sigma}^\circ \rangle C_V^\circ + \sum_{\varsigma=1}^N \langle \Delta \hat{\sigma}^{(\varsigma)} \rangle C_V^{(\varsigma)} = \hat{\mathbf{O}}_2,$$

где  $\hat{\mathbf{O}}_2$  — тензор второго ранга с нулевыми компонентами. Все тензоры второго ранга, входящие в левые части этих равенств и определенные формулами (11) и (13), имеют один и тот же множитель  $\hat{\varepsilon}_0$ , характеризующий макроскопически однородное деформированное состояние композита. Поэтому при осреднении этот множитель можно опустить и перейти к осреднению тензоров четвертого ранга, определенных формулами (12) и (14):

$$\langle \hat{\mathbf{u}}^\circ \rangle C_V^\circ + \sum_{\varsigma=1}^N \langle \hat{\mathbf{u}}^{(\varsigma)} \rangle C_V = \hat{\mathbf{O}}_4, \quad \langle \hat{\mathbf{v}}^\circ \rangle C_V^\circ + \sum_{\varsigma=1}^N \langle \hat{\mathbf{v}}^{(\varsigma)} \rangle C_V = \hat{\mathbf{O}}_4. \quad (15)$$

Тензоры  $\hat{\mathbf{v}}^\circ$  и  $\hat{\mathbf{v}}^{(\varsigma)}$  по сравнению соответственно с тензорами  $\hat{\mathbf{u}}^\circ$  и  $\hat{\mathbf{u}}^{(\varsigma)}$  имеют одинаковый дополнительный множитель в виде изотропного тензора  $\hat{\mathbf{C}} - \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{W}}$ . Поэтому осреднение левых частей обоих равенств (15) даст одинаковый результат, т. е. достаточно осреднить более простые по структуре тензоры  $\hat{\mathbf{u}}^\circ$  и  $\hat{\mathbf{u}}^{(\varsigma)}$ .

В первые формулы (12) и (14) входит внутреннее произведение изотропных тензоров  $\hat{\mathbf{C}}$  и  $\hat{\mathbf{W}}$ . С учетом формул (1), (2) и (11) получим

$$\hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{W}}^\circ = 9K \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \hat{\mathbf{V}} + 15G \frac{1 - \nu}{4 - 5\nu} \hat{\mathbf{D}}.$$

Тогда, продолжив преобразования, вместо первой формулы (12) с учетом зависимости  $\nu$  от  $K$  и  $G$  запишем

$$\hat{\mathbf{u}}^\circ = \left( \frac{3K + 4G}{3K^\circ + 4G} - 1 \right) \hat{\mathbf{V}} + \left( \frac{5G(3K + 4G)}{6G^\circ(K + 2G) + G(9K + 8G)} - 1 \right) \hat{\mathbf{D}},$$

а вместо первой формулы (14) —

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}^{(\varsigma)} = & \left( \frac{3K + 4G}{C_{iimm}^{(\varsigma)}/3 + 4G} - 1 \right) \hat{\mathbf{V}} + \\ & + \left( \frac{5G(3K + 4G)}{3(C_{iim}^{(\varsigma)} - C_{iimm}^{(\varsigma)}/3)(K + 2G)/5 + G(9K + 8G)} - 1 \right) \hat{\mathbf{D}}. \end{aligned}$$

Операция осреднения этих тензоров равносильна вычислению их линейных инвариантов путем полной свертки с тензорами  $\hat{\mathbf{V}}$  и  $\hat{\mathbf{D}}$  [1, 3].



В итоге получим систему двух алгебраических уравнений

$$\sum_{\varsigma=1}^N C_V^{(\varsigma)} / (C_{imm}^{(\varsigma)} / 3 + 4G) = 1 / (3K + 4G) - C_V^{\circ} / (3K^{\circ} + 4G),$$

$$\sum_{\varsigma=1}^N \frac{C_V^{(\varsigma)}}{3(C_{imim}^{(\varsigma)} - C_{imm}^{(\varsigma)} / 3)(K + 2G) / 5 + G(9K + 8G)} = \quad (16)$$

$$= \frac{1}{5G(3K + 4G)} - \frac{C_V^{\circ}}{6G^{\circ}(K + 2G) + G(9K + 8G)},$$

достаточных для нахождения эффективных модулей  $K$  и  $G$  композита.

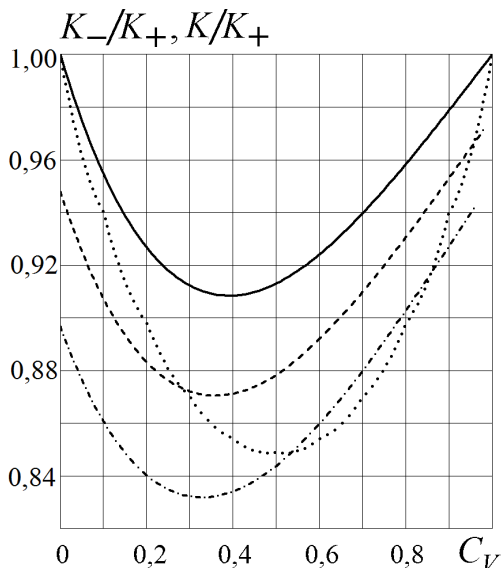
Метод самосогласования позволяет учесть влияние пор в композите на его упругие характеристики, если их рассматривать как один из типов включений с нулевыми компонентами тензора коэффициентов упругости. В качестве примера проведем сравнение оценок объемного модуля упругости и модуля сдвига композита, матрицей которого является кобальт  $Co$ , упрочненный дисперсными частицами карбида вольфрама  $WC$ . Такой композит получают методами порошковой металлургии, что даже при использовании современной технологии приводит к возникновению в нем пор с объемной концентрацией  $C_p \approx 0,02$  [8]. Частицы карбида вольфрама можно считать кристаллами с гексогональной плотноупакованной решеткой, имеющей следующие значения (в ГПа) элементов матрицы шестого порядка, соответствующей тензору коэффициентов упругости [9, 10]:  $C_{11} = 720$ ;  $C_{12} = 254$ ;  $C_{13} = 151$ ;  $C_{33} = 972$ ;  $C_{44} = 328$  и  $C_{66} = (C_{11} - C_{12}) / 2 = 233$ . Для матрицы примем  $K^{\circ} = 172,4$  ГПа и  $G^{\circ} = 79,3$  ГПа [11].

На рис. 1 представлены результаты расчетов объемного модуля упругости  $K$  для рассматриваемого композита, нормированные по верхней оценке (в предположении отсутствия пористости)  $K_+ = C_V^{\circ} K^{\circ} + (1 - C^{\circ}) K^{\bullet}$  этого композита, где  $K^{\bullet} = 391,6$  ГПа — объемный модуль упругости карбида вольфрама, вычисленный по приведенным выше значениям элементов матрицы коэффициентов упругости. Пунктирная линия соответствует зависимости от объемной концентрации  $C_V$  карбида вольфрама отношения  $K_- / K_+$  нижней и верхней оценок объемного модуля упругости композита без пористости, а сплошная, штриховая и штрихпунктирная кривые — зависимостям отношения  $K / K_+$ , в котором  $K$  вычислено методом самосогласования для композита со значениями пористости  $C_p = 0$ ,  $C_p = 0,02$  и  $C_p = 0,04$  соответственно. В этом случае система уравнений (16) имела вид



**Рис. 1.** Зависимости относительной величины объемного модуля упругости композита с матрицей из кобальта от объемной концентрации  $C_V$  включений карбида вольфрама:

пунктирная линия — отношение  $K_-/K_+$  нижней и верхней оценок без пористости матрицы; сплошная, штриховая и штрихпунктирная кривые — отношение  $K/K_+$  со значениями пористости  $C_p = 0$ ,  $C_p = 0,02$  и  $C_p = 0,04$  соответственно



$$\frac{\frac{C_V}{(I_1/3 + 4G)} + \frac{C_p}{4G}}{C_V} = \frac{1}{3K + 4G} - \frac{1 - C_V - C_p}{3K^\circ + 4G},$$

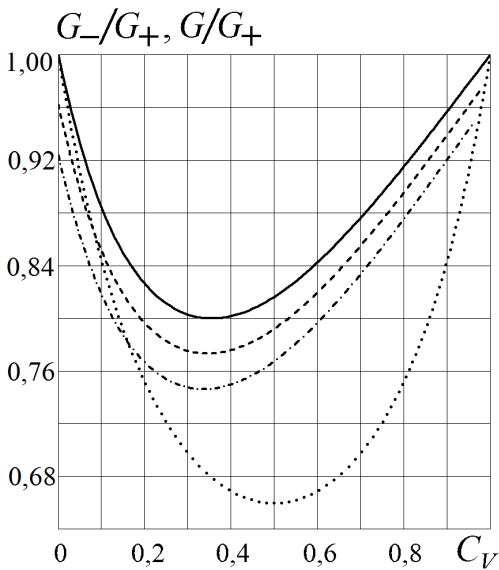
$$\frac{3I_2(K + 2G)/5 + G(9K + 8G)}{1} + \frac{C_p}{C_V} = \frac{G(9K + 8G)}{C_V^\circ} \quad (17)$$

$$= \frac{5G(3K + 4G)}{6G^\circ(K + 2G) + G(9K + 8G)},$$

где  $I_1 = 2C_{11} + 2C_{12} + 4C_{13} + C_{33} = 3524$  ГПа и  $I_2 = 2C_{11} + C_{33} + 4C_{44} + 2C_{66} - I_1/3 = 3015$  ГПа — инварианты тензора коэффициентов упругости карбида вольфрама.

Из рис. 1 следует, что для композита с объемным содержанием пор  $C_p = 0,02$  при  $C_V \leq 0,28$  объемный модуль упругости меньше его нижней оценки, а в случае  $C_p = 0,04$   $K > K_-$  лишь при  $C_V \in (0,54; 0,85)$ . По результатам решения системы уравнений (17) на рис. 2 приведены графики зависимостей  $G_-/G_+$  и  $G/G_+$  от  $C_V$  (кривые идентичны рис. 1) при  $G_+ = C_V^\circ G^\circ + (1 - C_V^\circ)G^\bullet$ , где  $G^\bullet = 301,5$  ГПа — модуль сдвига карбида вольфрама, соответствующий приведенным выше значениям элементов матрицы коэффициентов упругости. Из сравнения графиков на рис. 1 и 2 видно, что пористость влияет на снижение объемного модуля упругости рассматриваемого композита сильнее, чем на снижение его модуля сдвига.

По значениям объемного модуля упругости и модуля сдвига по формуле  $E = 9G/(3 + G/K)$  можно вычислить продольный модуль упругости (модуль Юнга) композита. Графики на рис. 3 соответствуют зависимостям от  $C_V$  отношений  $\hat{E}_+ = E_+/E^\bullet$  и  $\hat{E}_- = E_-/E^\bullet$  (штрихпунктирная и пунктирная линии), а также отношения  $\hat{E} = E/E^\bullet$

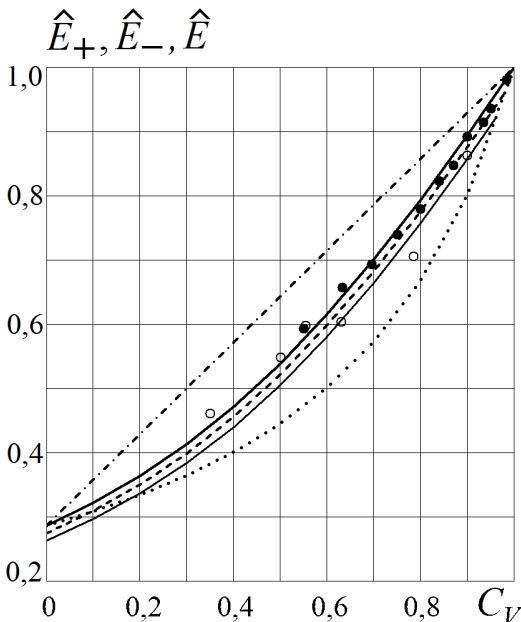


**Рис. 2.** Зависимости относительной величины модуля сдвига композита с матрицей из кобальта от объемной концентрации  $C_V$  включений карбида вольфрама:

пунктирная линия — отношение  $G_-/G_+$  нижней и верхней оценок без пористости матрицы; сплошная, штриховая и штрихпунктирная кривые — отношение  $G/G_+$  со значениями пористости  $C_p = 0$ ,  $C_p = 0,02$  и  $C_p = 0,04$  соответственно

при  $C_p = 0$  (толстая сплошная кривая),  $C_p = 0,02$  (штриховая кривая) и  $C_p = 0,04$  (тонкая сплошная кривая), где  $E^* = 9G^*/(3 + G^*/K^*) = 719,8$  ГПа. Светлыми кружками отмечены экспериментальные данные из работы [11], а темными кружками — из работы [12]. Можно предположить, что заметное отклонение экспериментальной точки (светлый кружок) при  $C_V = 0,78$  от расчетных кривых вызвано более высокой пористостью испытанного образца композита.

**Заключение.** Полученные двусторонние оценки упругих характеристик композита с анизотропными шаровыми включениями дают



**Рис. 3.** Зависимости относительной величины продольного модуля упругости композита с матрицей из кобальта от объемной концентрации  $C_V$  включений карбида вольфрама:

штрихпунктирная и пунктирная линии — отношения  $\hat{E}_+ = E_+/E^*$  и  $\hat{E}_- = E_-/E^*$  соответственно нижней и верхней оценок без пористости матрицы; сплошная толстая, штриховая и сплошная тонкая кривые — отношение  $\hat{E} = E/E^*$  со значениями пористости  $C_p = 0$ ,  $C_p = 0,02$  и  $C_p = 0,04$  соответственно; светлые и темные кружки — экспериментальные данные из работ [11] и [12] соответственно

возможность установить границы ожидаемых значений его модулей упругости, а также оценить наибольшую возможную погрешность вычисления этих значений. Применение метода самосогласования позволило выявить и проанализировать влияние пористости композита на его модули упругости. Установлено приемлемое согласование результатов расчетов с известными экспериментальными данными по измерению продольного модуля упругости композита с матрицей из кобальта, упрочненной дисперсными частицами карбида вольфрама.

*Работа выполнена по гранту НШ–1432.2014.8 программы Президента РФ государственной поддержки ведущих научных школ и гранту МК–6618.2013.8 программы Президента РФ государственной поддержки молодых кандидатов наук.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
2. Димитриенко Ю.И. Тензорное исчисление. М.: Высш. шк., 2001. 576 с.
3. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
4. Зарубин В.С. Прикладные задачи термпрочности элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1985. 296 с.
5. Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials // J. Mech. Phys. Solids. 1965. Vol. 13. No. 4. P. 213–222.
6. Кристенсен Р. Введение в механику композитов / пер. с англ. М.: Мир, 1982. 336 с.
7. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций / пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит. 1963. 248 с.
8. Капитонов А.М., Теремов С.Г., Редькин В.Е. Применение метода динамической упругости для контроля качества твердосплавного инструмента. Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2011. 192 с.
9. Lee M., Gilmore R.S. Single crystal elastic constants of tungsten monocarbide // J. Mater. Sci. 1982. Vol. 17. No. 9. P. 2657–2660.
10. Головчан В.Т., Бондаренко В.П., Литошенко Н.В. О прочности поликристаллического монокарбида вольфрама при растяжении // Проблемы прочности. 2003. № 4. С. 82–92.
11. Nishimatsu C., Gurland J. Experimental survey of the deformation of the hard-ductile two-phase alloy system WC–Co // Trans. Amer. Soc. Metals. 1960. Vol. 52. No. 2. P. 469–484.
12. Doi H., Fujiwara Y., Miyake K., Oosawa Y. A systematic investigation of elastic moduli of WC–Co alloys // Met. Trans. 1970. Vol. 1. No. 5. P. 1417–1425.

## REFERENCES

- [1] Shermergor T.D. Teoriya uprugosti mikroneodnorodnykh sred [The theory of elasticity of micro-inhomogeneous media]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 400 p.
- [2] Dimitrienko Yu.I. Tenzornoe ischislenie [Tensor calculus]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 2001. 576 p.
- [3] Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoy sredy [Mathematical models of mechanics and electrodynamics of continuous media]. Moscow, MGTU im. N.E. Bauman Publ., 2008. 512 p.

- [4] Zarubin V.S. Prikladnye zadachi termoprochnosti elementov konstruktivnykh [Applied problems of thermal strength of structural elements]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1985. 296 p.
- [5] Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 1965, vol. 13, no. 4, pp. 213–222.
- [6] Christensen R.M. Mechanics of composite materials. NY, Wiley-Interscience Publ., 1979. 348 p. (Russ. ed.: Kristensen R.M. Vvedenie v mekhaniku kompozitov. Moscow, Mir Publ., 1982. 334 p.).
- [7] Eshelby J.D., Seitz F., Turnbull D., eds. The continuum theory of lattice defects. In *Collected Works of J.D. Eshelby “Progress in Solid State Physics”*. New York, Academic Press Publ., 1956, vol. 3, pp. 79–303. (Russ. ed.: Eshelby Dzh. Kontinual'naya teoriya dislokatsiy. Sb. St., Lyubov B.Ya. — ed. [Eshelby J.D. The continuum theory of dislocations]. Moscow, IL Publ., 1963. 248 p.).
- [8] Kapitonov A.M., Teremov S.G., Red'kin V.E. Primenenie metoda dinamicheskoy uprugosti dlya kontrolya kachestva tverdosplavnogo instrumenta [Application of the method of dynamic elasticity to the quality control of carbide tools]. Krasnoyarsk, Sib. Feder. Uni. Publ., 2011. 192 p.
- [9] Lee M., Gilmore R.S. Single crystal elastic constants of tungsten monocarbide. *J. Mater. Sci.*, 1982, vol. 17, no. 9, pp. 2657–2660. DOI: 10.1007/BF00543901
- [10] Golovchan V.T., Bondarenko V.P., Litoshenko N.V. Strength of polycrystalline tungsten monocarbide under tension. *Problemy prochnosti* [Strength of Materials, vol. 35, iss. 4, pp. 387–394], 2003, no. 4, pp. 82–92 (in Russ.). DOI: 10.1023/A:1025894409190
- [11] Nishimatsu C., Gurland J. Experimental survey of the deformation of the hard ductile two-phase alloy system W-Co. *Trans. Amer. Soc. Metals*, 1960, vol. 52, no. 2, pp. 469–484.
- [12] Doi H., Fujiwara Y., Miyake K., Oosawa Y. A systematic investigation of elastic moduli of WC-Co alloys. *Met. Trans.*, 1970, vol. 1, iss. 5, pp. 1417–1425. DOI: 10.1007/BF02900264

Статья поступила в редакцию 27.01.2014

Зарубин Владимир Степанович — д-р техн. наук, профессор кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 250 научных работ в области математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Zarubin V.S. — Dr. Sci. (Eng.), professor of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 250 publications in the field of mathematical simulation of thermomechanical processes in materials and construction members.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Кувыркин Георгий Николаевич — д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 160 научных работ в области прикладной математики и математического моделирования термомеханических процессов в материалах и элементах конструкций.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Kuvyrkin G.N. — Dr. Sci. (Eng.), professor, head of “Applied Mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 160 publications in the field of applied mathematics and mathematical simulation of thermomechanical processes in materials and construction members.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Савельева Инга Юрьевна — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры “Прикладная математика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 10 научных работ в области моделирования нестационарной теплопроводности.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Savel'eva I. Yu. — Cand. Sci. (Phys.-Math.), assoc. professor of the “Applied mathematics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 10 publications in the field of simulation of nonstationary heat conductivity.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

---

**В Издательстве МГТУ им. Н.Э. Баумана вышла в свет книга**  
**ТЕПЛООБМЕН И ТЕПЛОВЫЕ ИСПЫТАНИЯ МАТЕРИАЛОВ**  
**И КОНСТРУКЦИЙ АЭРОКОСМИЧЕСКОЙ ТЕХНИКИ**  
**ПРИ РАДИАЦИОННОМ НАГРЕВЕ**

Монография посвящена проблемам теплообмена и тепловых испытаний материалов и конструкций аэрокосмической техники с использованием источников высокоинтенсивного излучения. Приведены результаты исследований характеристик наиболее перспективных трубчатых источников излучения и примеры их практического применения. Рассмотрены радиационный и радиационно-кондуктивный теплообмен в полупрозрачной рассеивающей среде, наиболее полно учитывающей особенности процессов теплообмена в материалах конструкций летательных аппаратов, а также вопросы теплообмена при тепловых испытаниях и моделировании теплового режима объектов испытаний.

Приведены примеры решения актуальных прикладных задач радиационного и радиационно-кондуктивного теплообмена. Затронуты наиболее важные методические вопросы измерения тепловых потоков и температур.

Для научных работников и инженеров, специализирующихся в области тепловых испытаний и теплофизических исследований объектов ракетно-космической техники. Может быть полезна студентам, обучающимся в вузах авиационного и ракетного профиля.

