

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЯЗКОУПРУГОГО ПОВЕДЕНИЯ ПОЛИУРЕТАНА ПРИ СЖАТИИ С УМЕРЕННО ВЫСОКИМИ СКОРОСТЯМИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

А.Е. Белкин<sup>1</sup>, И.З. Даштиев<sup>2</sup>, В.К. Семенов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация  
e-mail: a\_belkin@newmail.ru; semenov0811@gmail.com

ОАО “ЦНИИСМ”, г. Хотьково, Московская обл., Российская Федерация

*Представлена модель вязкоупругого поведения полиуретана SKU-ПФЛ-100 при сжатии до деформации 25...30% со скоростью деформирования до  $10\text{ с}^{-1}$ . При моделировании в качестве экспериментальных данных использованы диаграммы сжатия полиуретана с различными скоростями деформирования, полученные на машине Instron Electropuls 1000. Для определения вязкой составляющей деформации применена реологическая модель Бергстрема – Бойс. Связь напряжения с упругой составляющей деформации описана в двух вариантах: с помощью потенциала Муни – Ривлина и потенциала Арруда – Бойс. Приведены параметры модели, найденные путем минимизации функции отклонений расчетных значений от результатов эксперимента. Показано, что в рассмотренном диапазоне деформаций и их скоростей модель позволяет описать поведение полиуретана с достаточной для практических целей точностью. Модель предназначена для расчета полиуретановых элементов амортизаторов.*

**Ключевые слова:** полиуретан, диаграммы сжатия, скорость деформации, гистерезис, математическая модель Бергстрема – Бойс, определение параметров модели.

## MATHEMATICAL MODEL OF VISCOELASTIC BEHAVIOR OF POLYURETHANE UNDER COMPRESSION WITH MODERATELY HIGH STRAIN RATES

A.E. Belkin<sup>1</sup>, I.Z. Dashtiev<sup>2</sup>, V.K. Semenov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation  
e-mail: a\_belkin@newmail.ru; semenov0811@gmail.com

JSC “Central Research Institute for “Special Machinery”, Khotkovo, Moscow region, Russian Federation

*The model of viscoelastic polyurethane behavior with brand SKU-PFL-100 under compression up deformation until 25-30% with a deformation rate until  $10\text{ с}^{-1}$  is presented. Strain-stress curves of polyurethane with different strain rates produced with help of the machine “Instron Electropuls 1000” are used as the experimental data for this modeling. The authors applied the rheological model of Bergström – Boyes to define a viscous component of deformation. Stress relationship with an elastic component of deformation is described in two variants: by means of Mooney-Rivlin potential and Arruda-Boyes potential. Obtained values of model parameters are represented. They are found by minimization of deviations function between computation results from experimental data. It is shown that in the considered range of deformations and their rates the model allows to describe a polyurethane behavior with sufficient accuracy for practical purposes. The model is intended for calculation polyurethane elements of shock-absorbers.*

**Keywords:** polyurethane, strain-stress curves, strain rates, hysteresis, Bergström – Boyes mathematical model, definition of model parameters.

Для виброизоляции крупных объектов в условиях интенсивных динамических нагрузок применяют амортизаторы из полиуретана, имеющего высокие показатели прочности, удельной энергоемкости и поглощения энергии. Проектирование амортизаторов с требуемыми характеристиками должно основываться на вычислительных экспериментах, учитывающих условия работы полиуретановых элементов. Основная сложность создания математической модели для расчетов амортизаторов связана с недостаточной изученностью зависимости механических свойств полиуретана от режима нагружения, в частности скорости нагружения.

В настоящей статье приведены результаты испытаний на сжатие образцов полиуретана СКУ-ПФЛ-100 при различных скоростях нагружения. Испытания проведены в диапазоне значений деформаций (0...30%), характерных для проектируемого амортизатора сжатия. На основании полученных данных определены параметры математической модели, описывающей поведение полиуретана в широком диапазоне скоростей деформаций.

**Результаты испытаний.** Основные механические характеристики полиуретана СКУ-ПФЛ-100, содержащиеся в справочной литературе [1], приведены ниже. Эти характеристики относятся главным образом к растяжению.

#### *Механические характеристики полиуретана СКУ-ПФЛ-100*

Твердость по Шору, усл.ед. ....	90–95
Предел прочности при растяжении, МПа.....	40–50
Относительное удлинение при разрыве, %.....	400–450
Относительное остаточное удлинение после разрыва, %.....	6–10
Условное напряжение при 100%-ном удлинении, МПа.....	13–16
Сопrotивление раздиру, Н/мм.....	90–100
Диапазон рабочей температуры, °С.....	–40...+110

Для изучения поведения полиуретана при сжатии проведена серия испытаний цилиндрических образцов при низких скоростях деформирования на машине Zwick 100 и при умеренно высоких скоростях деформирования на машине Instron Electropuls 1000. Испытания и диаграммы сжатия при низких и высоких скоростях деформирования в дальнейшем будем называть соответственно статическими и динамическими.

В испытаниях использовались короткие цилиндрические образцы с отношением высоты к диаметру 1,6. Испытания проводились при комнатной температуре. Для снижения влияния трения на торцы образцов наносилась смазка ОКБ-122-7.

В статических испытаниях для получения стабильных характеристик осуществлялось циклическое нагружение. Форма цикла нагружения была треугольная, т.е. нагрузка и разгрузка происходили с постоянными, причем равными, скоростями. Фаза отдыха между циклами нагрузка–разгрузка отсутствовала. Установление диаграммы сжатия наблюдалось фактически после двух-трех циклов. Основные параметры статических испытаний приведены далее.

***Параметры статических испытаний на машине Zwick 100***

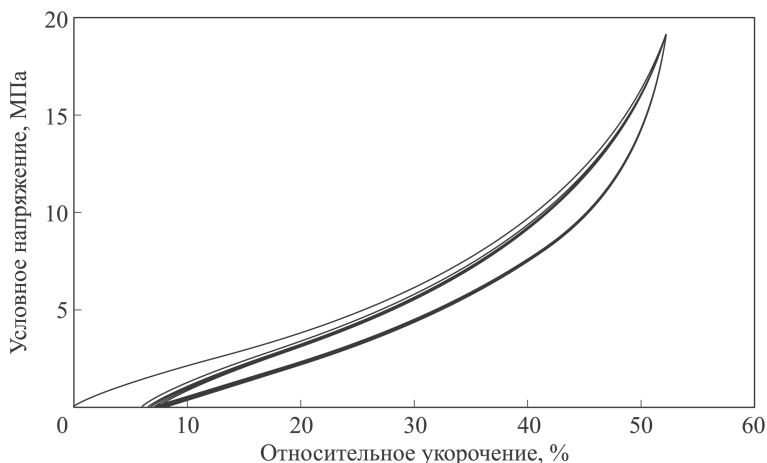
Нагружение .....	Циклическое
Форма цикла .....	Треугольная
Число циклов нагружения .....	5
Скорость деформирования, с <sup>-1</sup> .....	0,0022
Максимальное относительное укорочение образца, % .....	52

Диаграммы пяти циклов сжатия в координатах “условное напряжение – относительное укорочение” приведены на рис. 1.

Для каждого цикла определены значения удельной накопленной, возвращенной и рассеянной энергии, а также коэффициент механических потерь (относительный гистерезис) (табл. 1). Видно, что уже начиная со второго цикла энергетические характеристики циклов различаются весьма незначительно, что свидетельствует об установлении процесса деформирования.

По диаграммам сжатия (см. рис. 1) определены значения начального модуля упругости полиуретана при медленном деформировании. При третьем–пятом циклах нагружения начальный модуль упругости составляет 20... 30 МПа для диапазона относительных укорочений 0... 10 %.

В динамических испытаниях на машине Instron ElectroPuls 1000 образцы подвергались периодической импульсной нагрузке. Во всех



**Рис. 1. Диаграммы сжатия полиуретана SKU-ПФЛ-100 на первых пяти циклах**

**Энергетические характеристики циклов нагружения**

Цикл нагружения	Накопленная энергия, Дж/см <sup>3</sup>	Возвращенная энергия, Дж/см <sup>3</sup>	Рассеянная энергия, Дж/см <sup>3</sup>	Относительный гистерезис
1	3,353	2,490	0,863	0,26
2	3,097	2,469	0,628	0,20
3	3,061	2,459	0,602	0,20
4	3,041	2,452	0,589	0,19
5	3,028	2,447	0,581	0,19

испытаниях номинальное значение максимальной сжимающей силы составляло 1 кН (максимальная сила для Instron ElectroPuls 1000). В использованных образцах диаметром 9,7 мм такая сила вызывает напряжение 13,5 МПа. Скорость нагружения изменялась от 1 кН/с (от 13,5 МПа/с) до 60 кН/с (до 812 МПа/с). В табл. 2 приведены основные параметры динамических испытаний.

Таблица 2

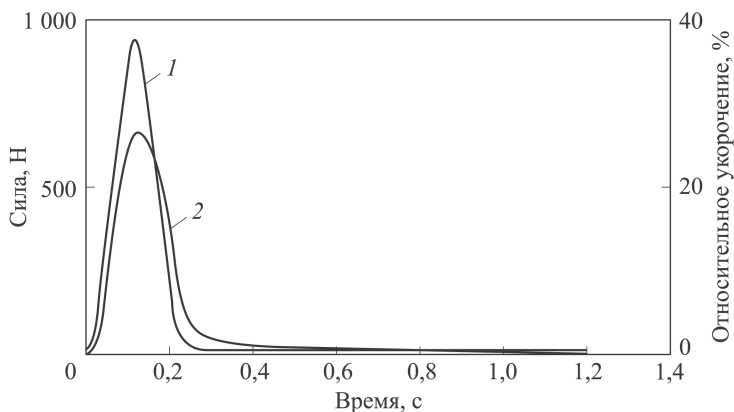
**Параметры динамических испытаний на машине Instron ElectroPuls 1000**

Испытание	Номинальная скорость нагружения, кН/с (МПа/с)	Средняя скорость деформирования, с <sup>-1</sup>	Номинальная максимальная нагрузка, кН	Время выдержки под нагрузкой, с	Время выдержки после разгрузки в цикле, с	Число циклов
1	1 (13,5)	0,29	1	0,1	10	10
2	10 (135)	2,26		0,01	1	6
3	25 (338)	4,85				
4	35 (474)	6,01				
5	50 (677)	8,61				
6	60 (812)	9,97				

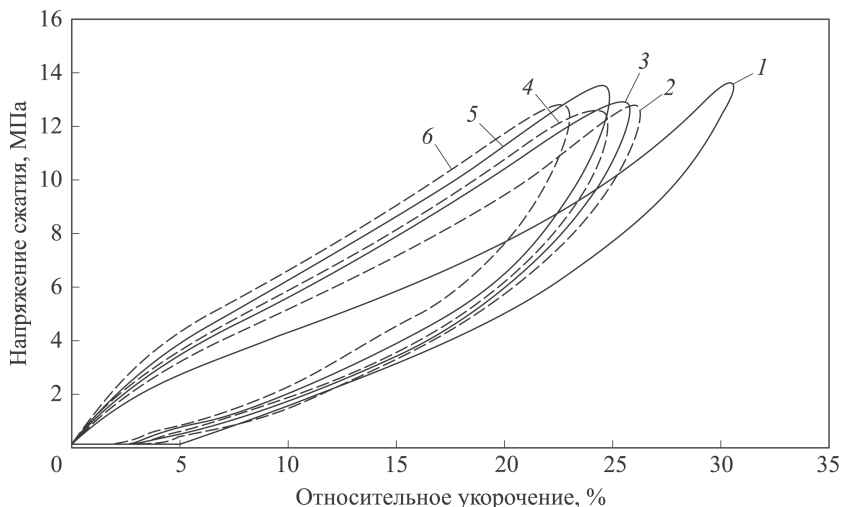
В качестве примера одного из реализованных испытаний на рис. 2 показаны графики изменения сжимающей силы и относительного укорочения образца в течение одного цикла нагружения со скоростью 10 кН/с, записанные в процессе испытания.

На рис. 3 приведены диаграммы динамического сжатия с различными скоростями. Диаграммы соответствуют установившемуся состоянию, когда каждый последующий цикл нагружения практически повторяет предыдущий.

Из результатов испытаний следует, что с увеличением скорости нагружения возрастает как начальный модуль упругости, так и среднее значение модуля во всем интервале деформаций. Максимальный прирост модуля отмечается при возрастании скорости от 1000 до 10000 Н/с. Далее скорость роста снижается.



**Рис. 2.** Графики изменения во времени силы сжатия (кривая 1) и относительного укорочения (кривая 2) в течение одного цикла нагружения образца



**Рис. 3.** Диаграммы сжатия полиуретана КУ-ПФЛ-100 при различных скоростях нагружения и разгрузки:  
 1 – 13,5 МПа/с; 2 – 135 МПа/с; 3 – 338 МПа/с; 4 – 474 МПа/с; 5 – 677 МПа/с; 6 – 812 МПа/с

Характеристики гистерезисных потерь приведены в табл. 3.

Видно, что с ростом скорости нагружения в рассмотренном диапазоне наблюдается некоторый рост относительного гистерезиса. Минимальное значение гистерезиса наблюдается при статическом нагружении (см. табл. 1).

Представленные результаты положим в основу математического описания поведения полиуретана.

**Математическая модель поведения полиуретана.** Среди многочисленных предложений по формулировке законов вязкоупругости для резиноподобных материалов одним из наиболее популярных является предложение Бергстрема–Бойс [2]. Как показывают исследования [2–4], модель Бергстрема – Бойс (в дальнейшем модель Б–Б) позволяет

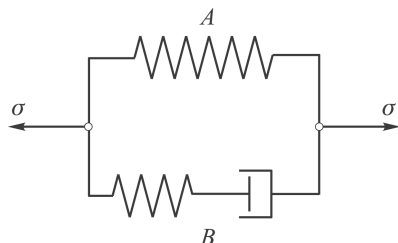
**Характеристики гистерезисных петель, полученных при динамических испытаниях**

Испытание	Средняя скорость деформирования, $\text{с}^{-1}$	Достигнутое условное напряжение, МПа	Относительное укорочение, %	Накопленная энергия, Дж/см <sup>3</sup>	Поглощенная энергия, Дж/см <sup>3</sup>	Относительный гистерезис
1	0,29	13,4	30,5	1,913	0,698	0,37
2	2,26	12,6	26,4	1,689	0,808	0,48
3	4,85	12,8	25,9	1,763	0,889	0,50
4	6,01	12,4	25,0	1,647	0,876	0,53
5	8,61	13,4	25,0	1,788	0,924	0,52
6	9,97	12,7	23,2	1,624	0,844	0,52

весьма точно описать экспериментальные данные для резины, включая гистерезис при циклическом нагружении и зависимость диаграмм материала от скорости деформирования. Применимость этой модели к полиуретану для процессов с низкими скоростями деформирования изучалась в работе [5], где сделан вывод о ее хорошей предсказательной способности. В настоящей статье модель Б–Б применяется для описания поведения полиуретана при одноосном сжатии с умеренно высокими скоростями деформирования, реализованными в испытаниях на машине Instron Electropuls 1000.

Согласно [2] поведение вязкоупругого материала подобно поведению условной механической системы (рис. 4), состоящей из двух параллельно соединенных звеньев *A*, *B* разной природы. Упругое звено *A* определяет поведение при медленном статическом нагружении, когда демпфер вязкоупругого звена *B* не сопротивляется деформации и не воспринимает напряжения. В случае конечной скорости деформации работают оба звена системы, причем сопротивление демпфера зависит от скорости деформации. При очень быстром динамическом (мгновенном) нагружении демпфер “запирается”, в нем не происходит деформации и напряжение распределяется между упругими элементами звеньев *A* и *B*. В этом случае реакция системы является упругой, однако жесткость повышается по сравнению с медленным упругим деформированием.

Выбор потенциала для упругих элементов звеньев, а также закона изменения вязких деформаций демпфера определяет поведение модели.



**Рис. 4. Условная модель вязкоупругого материала**

При параллельном соединении структур (звеньев) их деформации одинаковы

$$\mathbf{F}^A = \mathbf{F}^B = \mathbf{F}, \quad (1)$$

здесь  $\mathbf{F}$  — градиент вектора места (градиент деформации).

Напряжения в материале складываются из откликов структур (звеньев)

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^A + \boldsymbol{\sigma}^B. \quad (2)$$

Статическая составляющая напряжения  $\boldsymbol{\sigma}^A$  определяется соотношениями гиперупругости на основе выражения для удельной энергии деформации материала:

$$W^A = \frac{1}{2}k(J - 1)^2 + \bar{W}^A(\bar{I}_{1C}, \bar{I}_{2C}), \quad (3)$$

где  $k$  — модуль объемного сжатия;  $J = \det \mathbf{F}$  — мера объемной деформации;  $\bar{W}^A(\bar{I}_{1C}, \bar{I}_{2C})$  — энергия изохорической деформации;  $\bar{I}_{1C} = \text{tr } \bar{\mathbf{C}}$ ,  $\bar{I}_{2C} = \frac{1}{2}(\bar{I}_{1C}^2 - \bar{\mathbf{C}} : \bar{\mathbf{C}})$  — первый и второй инварианты тензора меры изохорической деформации  $\bar{\mathbf{C}} = J^{-2/3}\mathbf{F}^T\mathbf{F}$ .

В соответствии с выражением (3) второй тензор напряжений Пиюлы – Кирхгофа  $\mathbf{S}^A = 2\frac{\partial W^A}{\partial \mathbf{C}}$  имеет вид [6]

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^A = kJ(J - 1)\mathbf{C}^{-1} + 2\varphi_1^A \left( \mathbf{I} - \frac{1}{3}I_{1C}\mathbf{C}^{-1} \right) + \\ + 2\varphi_2^A \left( I_{1C}\mathbf{I} - \mathbf{C} - \frac{2}{3}I_{2C}\mathbf{C}^{-1} \right), \quad (4) \end{aligned}$$

где  $\varphi_1^A = J^{-2/3}\frac{\partial \bar{W}^A}{\partial \bar{I}_{1C}}$ ,  $\varphi_2^A = J^{-4/3}\frac{\partial \bar{W}^A}{\partial \bar{I}_{2C}}$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$ ,  $I_{1C} = \text{tr } \mathbf{C}$ ,  $I_{2C} = \frac{1}{2}(I_{1C}^2 - \mathbf{C} : \mathbf{C})$ .

Переходя к истинным напряжениям Коши по формуле  $\boldsymbol{\sigma}^A = J^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}^A\mathbf{F}^T$ , можно получить

$$\boldsymbol{\sigma}^A = k(J - 1)\mathbf{I} + 2J^{-1}(\varphi_1^A + I_{1C}\varphi_2^A)\text{dev}\mathbf{B} - 2J^{-1}\varphi_2^A\text{dev}(\mathbf{B}\mathbf{B}), \quad (5)$$

где  $\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$  — тензор меры деформации Фингера [6], символ  $\text{dev}$  обозначает девиатор тензора.

В настоящей работе для полиуретана использовались два варианта функции энергии изохорической деформации:

- традиционный для резины потенциал Муни – Ривлина

$$\bar{W}^A = C_{10}^A(\bar{I}_{1C} - 3) + C_{01}^A(\bar{I}_{2C} - 3); \quad (6)$$

• сравнительно недавно предложенный потенциал Арруда–Бойс [7] для цепочечной модели эластомера

$$\bar{W}^A = C^A \left( \frac{\lambda_{chain}}{\lambda_{lock}^A} \beta - \ln \frac{\text{sh } \beta}{\beta} \right), \quad (7)$$

где  $\lambda_{chain} = \sqrt{\bar{I}_{1C}/3}$  – кратность усредненного удлинения макромолекулярной цепи эластомера,  $\lambda_{lock}^A$  – предельное удлинение молекулярной цепи,  $\beta = L^{-1}(\lambda_{chain}/\lambda_{lock}^A)$  – функция, обратная к функции Ланжевена  $L(\beta) = \text{cth}(\beta) - \beta^{-1}$ ;  $C^A$  – коэффициент, пропорциональный начальному значению модуля сдвига.

Отметим, что для обратной к функции Ланжевена предложены различные аппроксимации [8, 9]; в работе применялась простейшая из них:

$$L^{-1}(x) = x \left( \frac{3 - x^2}{1 - x^2} \right), \quad x = \lambda_{chain}/\lambda_{lock}^A.$$

При потенциале (6) соотношения упругости имеют вид

$$\sigma^A = k(J - 1)\mathbf{I} + 2J^{-1}(C_{10}^A + \bar{I}_{1C}C_{01}^A)\text{dev } \bar{\mathbf{B}} - 2J^{-1}C_{01}^A\text{dev}(\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{B}}), \quad (8)$$

где  $\bar{\mathbf{B}} = J^{-2/3}\mathbf{B}$  – тензор меры Фингера для изохорической деформации.

При потенциале (7)

$$\sigma^A = k(J - 1)\mathbf{I} + \frac{G^A}{J\lambda_{chain}} \frac{L^{-1}(\lambda_{chain}/\lambda_{lock}^A)}{L^{-1}(1/\lambda_{lock}^A)} \text{dev} \bar{\mathbf{B}}, \quad (9)$$

где  $G^A = \frac{C^A}{3\lambda_{lock}^A} L^{-1}(1/\lambda_{lock}^A)$  – постоянная материала, имеющая значение начального модуля сдвига.

Обе модели содержат по три параметра, определяемых экспериментально: в модели Муни–Ривлина – это  $C_{10}^A$ ,  $C_{01}^A$ ,  $k^A$ ; в модели Арруда–Бойс – это  $G^A$ ,  $\lambda_{lock}^A$ ,  $k^A$ .

Определение динамической составляющей напряжения  $\sigma^B$  основывается на принципе мультипликативного разложения градиента полной деформации на упругую  $\mathbf{F}_e$  и вязкую  $\mathbf{F}_v$  части

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_v \quad (10)$$

с последующей формулировкой закона течения для скоростей вязких деформаций.

Пользуясь представлением (10) и составляя выражение для пространственного градиента скорости [6], можно получить следующее кинетическое уравнение:

$$\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_e^{-1} + \mathbf{F}_e \mathbf{D}_v \mathbf{F}_e^{-1}, \quad (11)$$

где  $\mathbf{D}_v$  – тензор скоростей вязких деформаций.



Тензор  $\mathbf{D}_v$  выражается по закону течения через девиатор напряжений

$$\mathbf{D}_v = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}_v}{\sigma_v} \text{dev } \boldsymbol{\sigma}^B, \quad (12)$$

где  $\dot{\epsilon}_v$ ,  $\sigma_v$  — интенсивности скоростей деформаций и напряжений в вязкой среде.

Для установления зависимости  $\dot{\epsilon}_v = f(\sigma_v, \lambda_{v \text{ chain}})$  в работе [2] использована физическая концепция движения макромолекул эластомера в так называемом полимерном расплаве [10]. Исходя из этой концепции и привлекая результаты обширных экспериментов на резинах различных марок, Бергстрем и Бойс предложили следующую аппроксимацию закона:

$$\dot{\epsilon}_v = \frac{A \sigma_v^m}{(\lambda_{v \text{ chain}}^B - 1 + \delta_0)^n}, \quad (13)$$

где  $A$ ,  $m$ ,  $n$  — параметры закона деформирования;  $\delta_0$  — малая постоянная деформация, добавляемая, чтобы описать скорость ползучести при нулевой деформации.

Заметим, что соотношение (13) — это уравнение теории упрочнения [11], записанное для полимерных цепочек. Используем это соотношение для расчета полиуретана.

Из кинетического уравнения (11) с учетом закона течения (12), (13) можно выразить скорость упругой деформации

$$\dot{\mathbf{F}}_e = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}_e - \frac{3}{2} \frac{A (\sigma_v^B)^{m-1}}{(\lambda_{v \text{ chain}}^B - 1 + \delta_0)^n} \mathbf{F}_e \text{dev } \boldsymbol{\sigma}^B. \quad (14)$$

Если предположить, что градиент деформации  $\mathbf{F}$  и его скорость  $\dot{\mathbf{F}}$  фиксируются в ходе эксперимента и являются известными функциями времени, то соотношение (14) можно рассматривать как дифференциальное уравнение относительно градиента упругой деформации  $\mathbf{F}_e$ . При этом динамическая составляющая напряжения  $\boldsymbol{\sigma}^B$  выражается через тензор  $\mathbf{F}_e$ . Примем, что напряжение  $\boldsymbol{\sigma}^B$  подчиняется тем же законам упругости, что и напряжение  $\boldsymbol{\sigma}^A$  равновесного состояния, т.е. либо закону Муни – Ривлина

$$\boldsymbol{\sigma}^B = k(J_e - 1)\mathbf{I} + 2J_e^{-1}(C_{10}^B + \bar{I}_{1C_e} C_{01}^B) \text{dev } \bar{\mathbf{B}}_e - 2J_e^{-1} C_{01}^B \text{dev } (\bar{\mathbf{B}}_e \bar{\mathbf{B}}_e), \quad (15)$$

либо закону Арруда – Бойс

$$\boldsymbol{\sigma}^B = k(J_e - 1)\mathbf{I} + \frac{G^B}{J_e \lambda_{e \text{ chain}}^B} \frac{L^{-1}(\lambda_{e \text{ chain}}^B / \lambda_{lock}^B)}{L^{-1}(1 / \lambda_{lock}^B)} \text{dev } \bar{\mathbf{B}}_e. \quad (16)$$

Интегрирование дифференциального уравнения (14) должно выполняться с начальным условием

$$\mathbf{F}_e|_{t=0} = \mathbf{I}. \quad (17)$$

**Одноосное напряженное состояние.** Деформированное состояние материала при одноосном растяжении–сжатии определяется значениями кратностей удлинения–укорочения в продольном и поперечном направлениях, обозначаемых  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  соответственно. Для этого состояния составим матрицы из компонент тензоров  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\bar{\mathbf{B}}$ ,  $\text{dev}\bar{\mathbf{B}}$ ,  $\text{dev}(\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{B}})$ :

$$\begin{aligned} [\mathbf{F}] &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, & [\mathbf{B}] &= \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix}, \\ [\bar{\mathbf{B}}] &= \begin{bmatrix} (\lambda_1/\lambda_2)^{4/3} & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_1/\lambda_2)^{-2/3} & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_1/\lambda_2)^{-2/3} \end{bmatrix}, \\ [\text{dev}\bar{\mathbf{B}}] &= \left[ (\lambda_1/\lambda_2)^{4/3} - (\lambda_1/\lambda_2)^{-2/3} \right] \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, & (18) \\ [\text{dev}\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{B}}] &= \left[ (\lambda_1/\lambda_2)^{8/3} - (\lambda_1/\lambda_2)^{-4/3} \right] \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Из соотношений упругости (8), (9) с учетом определений (18) можно получить выражения для действующего напряжения растяжения–сжатия:

- в случае закона Муни – Ривлина

$$\sigma_1^A = 2J^{-1} \left[ C_{10}^A + C_{01}^A \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{-2/3} \right] \left[ \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{4/3} - \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{-2/3} \right], \quad (19)$$

- в случае закона Арруда – Бойс

$$\sigma_1^A = \frac{G^A}{J\lambda_{chain}} \frac{L^{-1}(\lambda_{chain}/\lambda_{lock}^A)}{L^{-1}(1/\lambda_{lock}^A)} \left[ \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{4/3} - \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{-2/3} \right]. \quad (20)$$

При использовании формул (19), (20) следует считать, что кратность удлинения в поперечном направлении  $\lambda_2$  является величиной, зависимой от кратности удлинения в продольном направлении  $\lambda_1$ , и

определяется через  $\lambda_1$ , исходя из условия  $\sigma_2^A = \sigma_3^A = 0$ . Такой подход к определению  $\lambda_2$  предполагает известным значение модуля объемного сжатия материала. К сожалению, этот параметр для эластомеров, в частности полиуретанов, редко известен с достаточной точностью. Однако при одноосном напряженном состоянии малая объемная сжимаемость материала практически не влияет на податливость образца. Поэтому при описании экспериментальных диаграмм полиуретан рассматриваем как несжимаемый материал, полагая, что объемная деформация отсутствует, т.е.  $J = \lambda_1 \lambda_2^2 = 1$ . Подставляя  $\lambda_2 = \lambda_1^{-1/2}$  в соотношения упругости (19), (20), приведем их к виду

$$\sigma_1^A = 2 (C_{10}^A + C_{01}^A \lambda_1^{-1}) (\lambda_1^2 - \lambda_1^{-1}), \quad (21)$$

$$\sigma_1^A = \frac{G^A}{\lambda_{chain}} \frac{L^{-1}(\lambda_{chain}/\lambda_{lock}^A)}{L^{-1}(1/\lambda_{lock}^A)} (\lambda_1^2 - \lambda_1^{-1}), \quad (22)$$

где  $\lambda_{chain} = \sqrt{\frac{1}{3} (\lambda_1^2 + 2\lambda_1^{-1})}$ .

Законы упругости (21), (22) являются двухпараметрическими. Отметим, что между параметрами законов существует связь  $G^A = 2(C_{10}^A + C_{01}^A)$ .

Для определения динамической составляющей напряжения  $\sigma_1^B$  используются те же законы упругости (21) или (22), в которых полная кратность удлинения материала  $\lambda_1$  заменена на кратность упругого удлинения  $\lambda_{1e}^B$  ветви В (см. рис. 4) и параметры упругих моделей имеют новые значения  $C_{10}^B, C_{01}^B$  или  $G^B, \lambda_{lock}^B$ .

В случае одноосного напряженного состояния уравнение (14) принимает вид

$$\frac{\dot{\lambda}_{1e}^B}{\lambda_{1e}^B} = \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} - \frac{A |\sigma_1^B|^m}{|\lambda_{v chain}^B - 1 + \delta_0|^n} \text{sign}(\sigma_1^B). \quad (23)$$

Как уже отмечалось, испытания образцов проводились с заданным законом нагружения, поэтому условное напряжение в материале (отношение нагрузки на образец к начальной площади его поперечного сечения) будем считать известной функцией времени. В несжимаемом материале при одноосном напряженном состоянии истинное напряжение  $\sigma_1$  связано с условным напряжением  $\sigma_1^*$  соотношением

$$\sigma_1 = \lambda_1 \sigma_1^*. \quad (24)$$

Подставляя в (24)  $\sigma_1 = \sigma_1^A(\lambda_1) + \sigma_1^B(\lambda_{1e}^B)$  и дифференцируя полученное уравнение по времени, находим

$$\left( \frac{\partial \sigma_1^A}{\partial \lambda_1} \right) \dot{\lambda}_1 + \left( \frac{\partial \sigma_1^B}{\partial \lambda_{1e}^B} \right) \dot{\lambda}_{1e}^B = \dot{\lambda}_1 \sigma_1^* + \lambda_1 \dot{\sigma}_1^*. \quad (25)$$

При установленных связях  $\sigma_1^A(\lambda_1), \sigma_1^B(\lambda_{1e}^B)$  система дифференциальных уравнений (23), (25) может быть численно проинтегрирована по

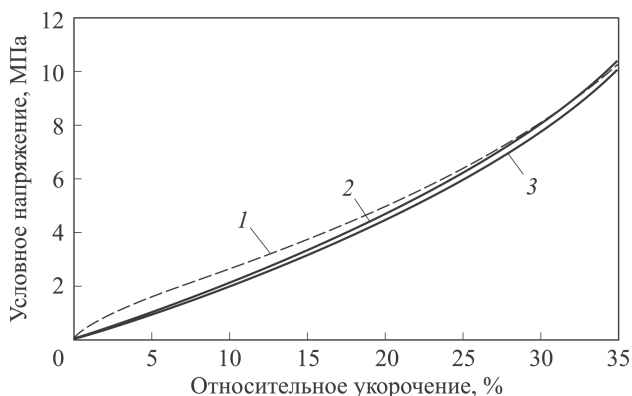
времени. Таким образом, для заданного закона нагружения  $\sigma_1^*(t)$  определяются кратности удлинений  $\lambda_1$ ,  $\lambda_{1e}^B$  как функции времени.

**Результаты моделирования.** Значения параметров  $C_{10}^A$ ,  $C_{01}^A$  модели Муни–Ривлина (21) и параметров  $G^A$ ,  $\lambda_{lock}^A$  модели Арруда–Бойс (22) подбирались так, чтобы по возможности точнее описать кривую статического нагружения полиуретана, показанную на рис. 1. Относительные укорочения ограничивались значением 35%. Для поиска указанных параметров использовался алгоритм минимизации функции отклонений расчетных величин  $\sigma_1^*(\lambda_1)$  от результатов эксперимента методом Нелдера–Мида, подробно изложенный в работе [12]. Независимо от этого для повышения достоверности осуществлялся поиск значений с помощью встроенных средств программы Ansys. В результате независимых решений установлены диапазоны значений параметров  $C_{10}^A = 2,5 \dots 3$  МПа,  $C_{01}^A = 0 \dots 0,45$  МПа,  $G^A = 5,1 \dots 5,5$  МПа,  $\lambda_{lock}^A = 1,5 \dots 1,7$ .

На рис. 5 показаны расчетные и экспериментальная статические диаграммы сжатия полиуретана. Расчеты по модели Муни–Ривлина выполнены при параметрах  $C_{10}^A = 3$  МПа,  $C_{01}^A = 0$ , по модели Арруда–Бойс при  $G^A = 5,4$  МПа,  $\lambda_{lock}^A = 1,65$ . Видно, результаты моделирования (кривые 2 и 3, см. рис. 5) мало различаются между собой. Поэтому при одноосном сжатии в рассмотренном диапазоне относительных укорочений от 0 до 35% приемлемы обе модели. Подчеркивая пригодность моделей в целом, отметим, что на начальном участке кривой нагружения, где согласно результатам испытаний наблюдается снижение жесткости полиуретана, расчетные кривые несколько уклоняются от экспериментальных (см. рис. 5).

В дальнейших расчетах упругих деформаций применялась модель Муни–Ривлина.

Задача калибровки вязкоупругой модели Бергстрема–Бойс существенно сложнее, чем подбор коэффициентов для соотношений упру-



**Рис. 5.** Результат описания экспериментальной диаграммы сжатия полиуретана (штриховая линия 1) с помощью модели Муни–Ривлина (кривая 2) и модели Арруда–Бойс (кривая 3)

гости (21), (22), и требует отдельного рассмотрения. В настоящей статье ограничимся представлением полученных результатов.

Для каждого динамического режима испытаний, указанного в табл. 2 и 3, параметры модели подбирались отдельно. Полученные значения приведены в табл. 4. В этой же таблице указаны рассчитанные по модели Бергстрема – Бойс значения относительного укорочения и поглощенной энергии при заданном цикле нагружения. Сравнивая их с соответствующими экспериментальными характеристиками из табл. 3, можно установить близость результатов.

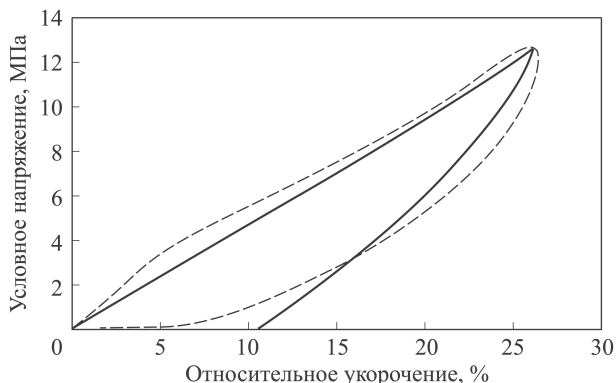
Таким образом, для отдельного динамического режима удается определить параметры модели, обеспечивающие согласование с экспериментом. При изменении режима нагружения параметры приходится переопределять. Процедура определения единого набора значений параметров модели, пригодных для описания экспериментальных данных при разных скоростях нагружения, требует дополнительного исследования.

Таблица 4

**Параметры модели Бергстрема – Бойс и рассчитанные характеристики диаграмм сжатия полиуретана**

Испытание	$C_{10}^B$ , МПа	$C_{01}^B$ , МПа	$A$ , МПа $^{-m} \cdot c^{-1}$	$m$	$n$	Достигнутое условное напряжение, МПа	Относительное укорочение, %	Поглощенная энергия, Дж/см $^3$
1	2,9	0	0,007	2	0,3	13,4	30,8	0,719
2	4,6	0	0,04	2	0,3	12,6	26,4	0,798
3	5,6	0	0,07	2	0,3	12,8	25,7	0,881
4	6,2	0	0,09	2	0,3	12,4	24,7	0,885
5	6,2	0	0,10	2	0,3	13,4	25,3	0,925
6	6,5	0	0,11	2	0,3	12,7	23,8	0,843

В качестве иллюстрации работы математической модели приведем пример диаграммы установившегося циклического сжатия, полученной интегрированием уравнений (23), (25). На рис. 6 показаны расчет-



**Рис. 6. Расчетная (сплошная линия) и экспериментальная (штриховая) диаграммы сжатия при скоростях нагружения и разгрузки 135 МПа/с**

ная и экспериментальная гистерезисные петли при сжатии со скоростью нагружения и разгрузки 135 МПа/с (в табл. 2–4 это испытание имеет номер 2). Говоря о формах гистерезисных петель, следует признать, что они заметно различаются. Вместе с тем величина рассеяния энергии, предсказываемая с помощью модели, хорошо соответствует эксперименту.

**Вывод.** Реологическая модель, предложенная Бергстромом и Бойс, позволяет описать поведение полиуретана при сжатии в рассмотренном диапазоне деформаций и их скоростей с достаточной для практических целей точностью.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Энциклопедия полимеров* / под ред. В.А. Каргина. Т. 1. М: Сов. энциклопедия, 1972. 1224 с.
2. Bergström J.S., Boyce M.C. Constitutive Modeling of the Large Strain Time-Dependent Behavior of Elastomers // *J. Mech. Phys. Solids*, 1998. Vol. 46. P. 931–954.
3. Bergström J.S. and Boyce M.C. Mechanical behavior of particle filled elastomers // *Rubber Chem. Technol.*, 1999. Vol. 72. P. 633–656.
4. Quintavalla S.J., Johnson S.H. Extension of the Bergström–Boyce model to high strain rates // *Rubber Chem. Technol.*, 2004. Vol. 77. P. 972–981.
5. Qi H.J., Boyce M.C. Stress-Strain Behavior of Thermoplastic Polyurethane // *Mechanics of Material*. Vol. 37, Issue 8, August 2005. P. 817–839.
6. Голованов А.И., Султанов Л.У. Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых тел. Казань: Казанский гос. ун-т, 2009. 465 с.
7. Arruda E.M., Boyce M.C. A Three-dimensional Constitutive Model for the Large Stretch Behavior of Rubber Elastic Materials // *J. Mech. Phys. Solids*, 1993. Vol. 41. No. 2. P. 389–412.
8. Cohen A. A Pade approximant to the inverse Langevin function // *Rheologica Acta*, 1991. Vol. 30. P. 270–273.
9. Norgan C.O. and Saccomandi G. A molecular–statistical basis for the gent constitutive model of rubber elasticity // *J. of Elasticity*, 2002. Vol. 68. P. 167–176.
10. Дой М., Эдвардс С. Динамическая теория полимеров. М.: Мир, 1998. 440 с.
11. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
12. Семенов В.К., Белкин А.Е. Математическая модель вязкоупругого поведения резины при циклическом нагружении // *Изв. вузов. Машиностроение*. 2014. № 2. С. 46–51.

## REFERENCES

- [1] Kargin V.A., eds. *Entsiklopediya polimerov*. T. 1 [Encyclopedia of polymers. Vol. 1]. Moscow, Sov. Entsiklopediya Publ., 1972. 1224 p.
- [2] Bergström J.S., Boyce M.C. Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers. *J. Mech. Phys. Solids*, 1998, vol. 46, iss. 5, pp. 931–954.
- [3] Bergström J. S. and Boyce M. C. Mechanical behavior of particle filled elastomers. *Rubber Chem. Technol.*, 1999, vol. 72, pp. 633–656.
- [4] Quintavalla S.J., Johnson S.H. Extension of the Bergström–Boyce model to high strain rates. *Rubber Chem. Technol.*, 2004, vol. 77, pp. 972–981.
- [5] Qi H.J., Boyce M.C. Stress-Strain Behavior of Thermoplastic Polyurethane. *Mechanics of Material*, 2005, vol. 36, iss. 8, pp. 817–839.

- [6] Golovanov A.I., Sultanov L.U. Matematicheskie modeli vychislitel'noy nelineynoy mekhaniki deformiruemykh sred [Mathematical models of computational nonlinear mechanics of deformable continua]. Kazan', Kazanskiy Gosudarstvennyy Uni. Publ., 2009. 465 p.
- [7] Arruda E.M., Boyce M.C. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 1993, vol. 41, no. 2, pp. 389–412.
- [8] Cohen A. A Pade approximant to the inverse Langevin function. *Rheologica Acta*, 1991, vol. 30, pp. 270–273.
- [9] Norgan C.O., Saccomandi G. A molecular - statistical basis for the gent constitutive model of rubber elasticity. *Journal of Elasticity*, 2002, vol. 68, pp. 167–176.
- [10] Doi M., Edwards S.F. The theory of polymer dynamics. Oxford, Clarendon Press, 1986. 391 p. (Russ. ed.: Doi M., Edwards S.F. Dinamicheskaya teoriya polimerov. Moscow, Mir Publ., 1998. 440 c.).
- [11] Kachanov L.M. Osnovy teorii plastichnosti [Foundations of the theory of plasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1969. 420 p.
- [12] Semenov V.K., Belkin A.E. A mathematical model of the viscoelastic behavior of rubber under cyclic loading. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mashinost.* [Proc. Univ., Mech. Eng.], 2014, no. 2, pp. 46–51 (in Russ.).

Статья поступила в редакцию 3.04.2014

Белкин Александр Ефимович — д-р техн. наук, профессор кафедры “Прикладная механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 70 научных работ в области численных методов расчета конструкций, механики резинокордных композитов и пневматических шин.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Belkin A.E. — Dr. Sci. (Eng.), professor of “Applied Mechanics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 70 publications in the field of numerical calculation methods of structures, mechanics of rubber-cord composites and pneumatic tires.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.

Даштиев Идрис Зилфикарович — д-р техн. наук, заместитель главного конструктора ОАО “ЦНИИСМ”. Автор более 125 научных работ и патентов в области механики и технологии полимерных композиционных материалов и конструкций на их основе.

ОАО “Центральный научно-исследовательский институт специального машиностроения”, Российская Федерация, 141371, г. Хотьково, Московская обл., Заводская ул., 1.

Dashtiev I.Z. — Dr. Sci. (Eng.), deputy chief designer of the JSC “Central Research Institute for Special Machinery”. Author of more than 125 publications and patents in the field of mechanics and technologies of polymeric composite materials and structures on their basis.

JSC “Central Research Institute for “Special Machinery”, Zavodskaya ul. 1, Khotkovo, Moscow region, 141371 Russian Federation.

Семенов Владимир Константинович — ассистент кафедры “Прикладная механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор четырех научных работ, специализируется в области численных методов расчета конструкций и механики эластомерных материалов.

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Semenov V.K. — assistant lecturer of “Applied Mechanics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of four publications in the field of numerical calculation methods of structures and mechanics of elastomeric materials.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.