

УДК 621.8

РАСЧЕТ ГЕОМЕТРИИ ВОЛНОВОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ С ЦИКЛОИДАЛЬНОЙ ФОРМОЙ И СИЛ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗУБЬЕВ КОЛЕС

С.С. Клеников

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
e-mail: klenikova@yandex.ru

Представлены основные положения алгоритма расчета геометрии волнового зацепления с циклоидальной формой зубьев колес. Выполнен сравнительный анализ достоинств и недостатков волновых механизмов с циклоидальной и эвольвентной формами зубьев. Показано, что высокая эффективность циклоидальной формы обусловлена более чем трехкратным превышением шага зуба над его высотой, что позволяет за счет разнесения концентраторов напряжений существенно повысить усталостный ресурс гибких зубчатых венцов и более чем в 2 раза снизить нижний порог передаточных отношений. Обоснована практическая целесообразность применения в волновых механизмах циклоидальной формы.

Ключевые слова: циклоида, эвольвента, волновое зацепление, зубья, гибкое колесо, жесткое колесо, волновой механизм.

GEOMETRY ANALYSIS OF HARMONIC GEAR WITH CYCLOIDAL COGS AND INTERACTION FORCES

S.S. Klenikov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
e-mail: klenikova@yandex.ru

Main principles of the geometry analysis algorithm are presented for harmonic gear with cycloidal cogs. A comparative analysis of the advantages and disadvantages of harmonic mechanisms with cycloidal and involute cog forms is conducted. It was shown that high performance of cycloidal form is caused by more than threefold excess of the cog spacing above its depth. It allows to increase drastically the fatigue endurance of the flexible cog crowns, and to decline lower threshold of the gear ratio more than twofold. Practical expediency of cycloidal cogs application in harmonic mechanisms is confirmed.

Keywords: cycloid, involute, harmonic cog gear, flexible gear, rigid gear, harmonic mechanism.

Изобретенные около 60 лет назад волновые механизмы (ВМ) благодаря своим более выигрышным массово-габаритным характеристикам, высокой кинематической точности, способности передавать механическое движение через герметичную стенку и ряду других достоинств получили самое широкое распространение в разных отраслях техники. Интенсивное внедрение ВМ сопровождалось их всесторонними исследованиями. Широкий спрос на механизмы с более высокой кинематической точностью обусловил большой объем исследований вопросов кинематики и геометрии волнового зацепления.

Однако ВМ имеют и существенные недостатки. Отметим лишь два из них.

У ВМ со стальными колесами и эвольвентными зубьями с разностью в два зуба нижняя граница передаточных отношений лежит в пределах от 60 до 80 единиц, что значительно сужает область их практического применения.

Экспериментально подтвержденный усталостный ресурс стандартных волновых редукторов достигает лишь 10 000 ч, что в 3 раза меньше ресурса соответствующих им по параметрам планетарных передач [1].

Указанные недостатки во многом устраняются использованием для волнового зацепления зубьев колес более благоприятных циклоидальных форм. Однако необходимо отметить, что ориентация на использование более предпочтительных циклоидальных форм зубьев колес сегодня является чисто теоретической попыткой их внедрения в практику волнового редукторостроения. В настоящее время в основном разработаны и реализованы методы расчета геометрии волнового зацепления, ориентированные на использование эвольвентных (с разносторонним расположением центров кривизн сопряженных поверхностей) и близких к ним форм зубьев колес. Выбор такой формы зубьев обусловлен, прежде всего, доступностью эвольвентного режущего инструмента и зуборезного оборудования. Определенную роль в выборе эвольвентных форм зубьев для волновых передач сыграло и то обстоятельство, что основной объем их исследований выполнен специалистами, которые в своей повседневной практике и ранее ориентировались на детально разработанные и широко используемые теории эвольвентного и станочного зацеплений [2].

Вместе с тем, теоретические исследования [3] показывают, что для волнового зацепления во всех отношениях наиболее эффективной является более сложная с технологической точки зрения циклоидальная форма зубьев. При прочих равных условиях между циклоидальными зубьями колес волновой пары (с односторонним расположением центров кривизн сопряженных поверхностей) возникают существенно меньшие контактные напряжения, чем в зубьях иной формы. Это обусловлено совпадением радиусов и центров кривизн во всех точках контакта по циклоидам сопряженных зубьев колес и более равномерным распределением контакта вдоль их длины. А поскольку при циклоидальной форме практически устраняется концентрация напряжений у ножек зубьев [4], которая в основном определяет усталостный ресурс гибкого колеса (ГК) с эвольвентными зубьями, следует ожидать заметного повышения несущей способности ВМ и их усталостного ресурса.

И что не менее важно, циклоидальная форма зубьев колес волнового зацепления с разностью в два зуба позволяет существенно снизить

нижнюю границу передаточных отношений ВМ с 60... 80 до 30... 35 единиц. Это позволяет значительно повысить скорость вращения выходного вала и тем самым существенно расширить область практического применения этих ВМ.

Сравнивая кинематику циклоидального и эвольвентного зацеплений, следует отметить, что в гипотетически точно изготовленных сопряженных зубьях ГК и жесткого колеса (ЖК) волновой пары, расположенной в пределах каждой волны зацепления, контакт циклоидальных зубьев реализуется по всему контуру арок циклоид, очерчивающих сопряженные зубья. При этом полностью отсутствует их взаимное проскальзывание. Теоретический КПД такого зацепления приближается к единице. Основными потерями энергии в этом случае являются лишь ее потери на упругую деформацию ГК. По данным В.К. Лобастова даже для жестких колес передач с внешними зубьями, но изготовленных с достаточно высокой точностью КПД циклоидального зацепления достигает 0,98... 0,99. С практической точки зрения для волнового зацепления, в формировании которого значительную роль играют упругие перемещения ГК, циклоидальная форма зубьев колес является наиболее эффективной, поскольку весьма высокая деформативность ГК “отфильтровывает” все технологические погрешности изготовления циклоидальных зубьев. Поэтому циклоидальная форма, даже при менее точном изготовлении зубьев, позволит производить ВМ с сохранением весьма высокого КПД и ряда других достоинств.

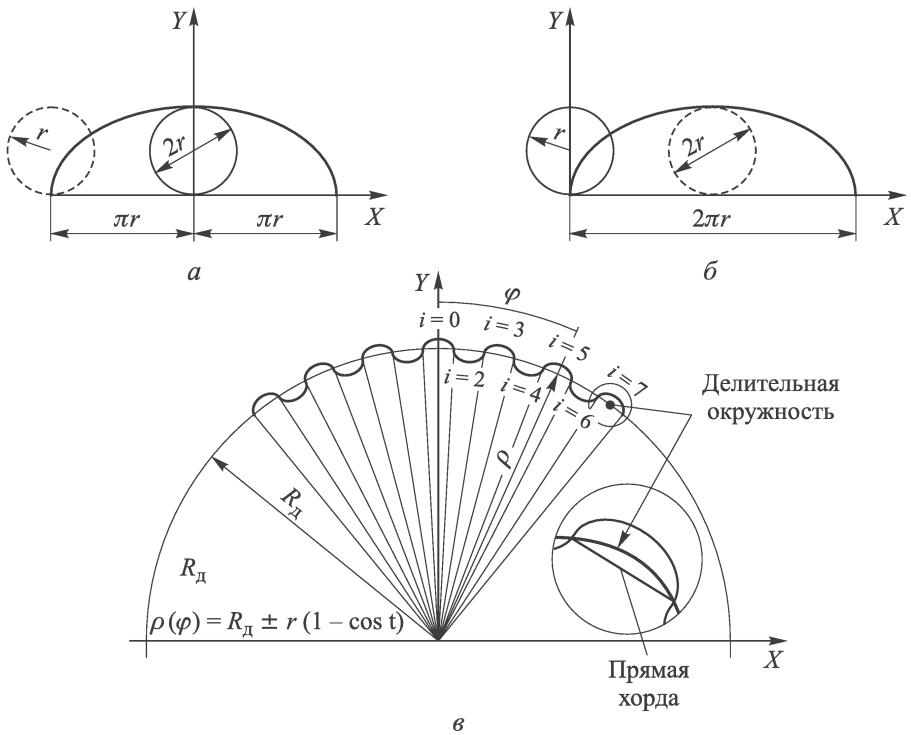
Уравнение циклоиды в параметрической форме в локальной системе координат (рисунок, a) имеет [5] вид

$$x = r(t - \sin t); \quad (1)$$

$$y = (+/-)r(1 - \cos t). \quad (2)$$

Здесь r — радиус производящей окружности, точки которой описывают траектории в виде арок циклоид при качении этой окружности без скольжения по прямой вдоль оси X , а t — параметр, меняющийся для арки циклоиды в пределах $0 \leq t \leq 2\pi$. Он показывает угол поворота производящей окружности от начала ее качения, совпадающего с началом координат.

В волновом зацеплении циклоида многократно используется как кривая, двумя арками которой очерчивается форма каждого зуба. Очевидно, что шаг такого зуба ($4\pi r$) в π раз больше его высоты ($4r$). Более чем трехкратное превышение шага зуба над его высотой приводит к тем же благоприятным эффектам, которые выявлены у гибких венцов с широкой впадиной [1]. Из-за увеличенной ширины впадины увеличивается податливость венца ГК, а концентраторы смежных зубьев



Расчетная схема геометрии волнового зацепления с циклоидальной формой зубьев колес

удаляются друг от друга. При этом из-за плавности перехода при нулевой производной от головки к впадине зуба существенно снижаются напряжения и в самих концентраторах.

Для исследования условий взаимного расположения зубьев колес, зазоров между ними и выявления координат точек их возможного контакта целесообразно перейти к новой локальной, симметричной относительно оси Y системе координат, сместив эту ось вдоль оси X на π (рисунок, б). При этом новая форма записи функций, описывающих смещенные арки циклоид, примет вид:

$$x = r(t - \pi - \sin t); \tag{3}$$

$$y = (+/-)r(1 - \cos t). \tag{4}$$

Для описания вершин зубьев в колесах с внешними зубьями в выражениях (2), (4) принимается знак “+”, а для описания впадин между зубьями принимается знак “-”. И наоборот, для колес с внутренними зубьями для вершин зубьев в (2), (4) принимается знак “-”, а для впадин принимается знак “+”. Переход к такой локальной системе координат обусловлен тем, что он позволяет совместить ось нулевой пары зубьев колес с большой осью деформирования ГК, сделав относительно этой оси симметричной всю глобальную систему отсчета для

обоих колес в ненагруженном состоянии (рисунок, в). В этом случае каждая i -я арка циклоиды будет симметричной относительно локальной оси y_i , угловая координата φ_i которой, отсчитываемая от большой оси ГК, будет равна $\varphi_i = i\pi/(2z)$, $i = 0, 1, 2 \dots z$.

При этом функция зазоров между сопрягаемыми зубьями колес легко представляется в виде геометрической и упругой составляющих. Геометрическая составляющая определяется из наложения недеформированных контуров ГК и ЖК, совмещенных центрами и осями симметрии X и Y , а упругая составляющая определяется значениями упругих перемещений соответствующих возможных точек контакта зубьев венца ГК.

Обозначим диаметры делительных окружностей ГК и ЖК через D_{Γ} и $D_{\text{ж}}$. При этом под делительной окружностью соответствующего колеса будем понимать такую окружность, которая проходит через начала и концы арок циклоид, очерчивающих головки и впадины зубьев этого колеса. Соединив концы арок циклоид прямыми хордами, вместо окружностей получим правильные n -угольники (для ЖК $n = 2z_{\text{ж}}$, а для ГК $n = 2z_{\Gamma}$) (см. рисунок, в).

В строгой постановке рассматриваемой задачи окружность, производящая арки циклоид, которые описывают головки зубьев колес с внешними зубьями, катится без скольжения со стороны выпуклости вдоль внешнего контура другой окружности радиуса $D_{\Gamma}/2$ — для ГК или $D_{\text{ж}}/2$ — для ЖК. Ее точки будут описывать траектории — эпициклоиды. Впадины между зубьями для колес с внешними зубьями будут описываться гипоциклоидами, которые являются траекториями точек той же окружности, если она катится без скольжения со стороны вогнутости вдоль внутреннего контура другой окружности радиуса $D_{\Gamma}/2$ — для ГК или $D_{\text{ж}}/2$ — для ЖК. Для колес с внутренними зубьями — наоборот, эпициклоиды будут описывать впадины, а гипоциклоиды — головки зубьев. Уравнения делительных окружностей колес в глобальной системе координат YOX , связанной с их центром (где ось Y совпадает с осью Y нулевой пары), имеют вид $Y^2 + X^2 = (D/2)^2$, где $D = D_{\Gamma}$ для ГК, и $D = D_{\text{ж}}$ для ЖК. Начала и концы арок эпициклоид и гипоциклоид будут лежать на этих окружностях. Между хордами и окружностями колес будут расположены сегменты круга с высотой их арок, равной $h = D/2 - \sqrt{(D/2)^2 - (\pi r)^2}$ (здесь πr — половина длины хорды, соединяющей начало и конец арки циклоиды). Площади, расположенные между арками эпициклоид и их хордами, будут несколько больше соответствующих площадей, заключенных между арками циклоид и теми же хордами, на значение площадей упомянутых ранее сегментов, поскольку в этом случае производящая окружность будет катиться со стороны выпуклости. Расстояние от наиболее удаленной точки эпициклоиды до хорды увеличится на h , где h — высота арки окружности радиуса $D/2$. И наоборот, площади, расположенные

между арками гипоциклоид и их хордами, будут несколько меньше соответствующих площадей, заключенных между арками циклоид и теми же хордами на величину площадей упомянутых ранее сегментов, поскольку в этом случае окружность будет катиться со стороны вогнутости. Однако при достаточно большом числе зубьев колес, например, при $z = 60$ и более, максимальное отклонение расстояний от наиболее удаленных от хорды точек эпициклоиды и гипоциклоиды до наиболее удаленной точки циклоиды составляет менее 1 %. Это сопоставимо с технологическими погрешностями их изготовления. Поэтому в практических расчетах ВМ эпициклоиды и гипоциклоиды целесообразно заменить циклоидами. Следует отметить, что при небольшом числе зубьев при проектировании жестких колес, когда радиус производящей окружности r и радиус большой окружности $D/2$ имеют одинаковый порядок, такая замена тоже приемлема. Однако в этом случае необходима последующая обточка зубьев по их внешнему контуру, поскольку наибольшие отклонения форм зубьев возникают у вершин арок.

Полагая, что производящие окружности радиуса r катятся вдоль прямых хорд, делительные окружности ЖК и ГК в расчетах заменяются n -угольниками. Поскольку от начала ($t = 0$) до конца ($t = 2\pi$) одной арки циклоиды расстояние равно $2\pi r$, а каждый зуб очерчен двумя арками и его шаг равен $4\pi r$, то при числе зубьев жесткого колеса, равном $z_{\text{ж}}$, связь между r и $D_{\text{ж}}$ будет иметь вид $r = D_{\text{ж}}/(4z_{\text{ж}})$. Например, при $D_{\text{ж}} = 360$ мм и $z_{\text{ж}} = 60$ $r = 1,5$ мм. В этом случае при двухволновом зацеплении с $\Delta z = 2$ для варианта, когда гибкое колесо будет являться внутренним $z_{\text{г}} = 58$, а $D_{\text{г}} = 348$ мм. А для варианта, когда гибкое колесо будет являться внешним $z_{\text{г}} = 62$, а $D_{\text{г}} = 372$ мм. И в том и в другом случаях максимальное радиальное перемещение гибкого колеса в одной волне составит 6 мм. Следует отметить, что высота такого циклоидального зуба равна $4r = 6$ мм, а шаг будет равен $4\pi r = 6\pi$ мм (рисунки, z).

Силы одностороннего взаимодействия и зазоры между зубьями колес рассчитывают в два этапа. На первом этапе рассчитывают силы взаимодействия и зазоры между зубьями, соответствующие собранному состоянию гибкого и жесткого колес, не нагруженных крутящим моментом. На этом этапе гибкому колесу придается определенная симметричная относительно оси Y форма, поскольку рассматривается система сил и зазоров, симметричная относительно большой оси деформирования гибкого колеса. У волнового пневмодвигателя такая форма создается подбором системы радиальных сил от толкателей на ГК, которая задается общей гистограммой их изменения. Например, если общее число радиальных толкателей равно 12, а в одной волне смежные четыре из них одновременно находятся в нагруженном состоянии (т.е. под давлением), то при $z_{\text{г}} = 60$ от пяти до десяти пар зубьев колес

в одной волне зацепления будут находиться в полном контакте. Это состояние соответствует построению зацепления по дуге постоянного радиуса. В этом случае система сил, действующих на ГК и со стороны толкателей, и со стороны ЖК, может быть найдена из матричного уравнения метода сил:

$$[p_{ij}]\{P_j\} = \{w_j\}. \quad (5)$$

Здесь $\{P_j\}$ — вектор столбец искомых сил, $\{w_j\}$ — вектор упругих перемещений, задаваемых ГК при его сборке с ЖК, а $[p_{ij}]$ — матрица коэффициентов влияния, построенная для выбранных точек ГК с координатами φ_i и φ_j , где $i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots$ — порядковые номера точек выбранной сетки. Для их вычисления можно воспользоваться разложением в ряд Фурье [6] уравнения упругой линии кольца, нагруженного двумя радиальными единичными силами:

$$p_{ij} = \frac{2(D_r/2)^3}{\pi EJ} \sum_{n/2,4,6\dots} \frac{n^2 \cos n(\varphi_i - \varphi_j)}{(n^2 - 1)^2}, \quad (6)$$

где D_r — диаметр делительной окружности гибкого колеса; E — модуль упругости первого рода его материала; J — приведенный момент инерции его поперечного сечения.

Изгибаемый зубчатый венец ГК во всех расчетах представляется нерастяжимым гладким кольцом с прямоугольной формой поперечного сечения. Его ширина равна ширине зубчатого венца, а эквивалентная толщина определяется из численного решения задачи об изгибе реального зубчатого венца методом конечных элементов [5].

Наиболее трудоемким и более сложным является расчет сил и зазоров между зубьями колес при нагружении ВМ, передаваемым крутящим моментом. Расчет проводится на втором этапе. Исходными данными сил и зазоров на этом этапе служат результаты расчета, полученные на первом этапе. Расчет сводится к многократному решению нестационарной динамической задачи деформирования эквивалентного по жесткости ГК [7, 8]:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{P\}, \quad (7)$$

где $[K]$ — матрица жесткости; $[M]$ — матрица масс; $[C]$ — матрица демпфирования; $\{P\}$ — вектор внешней нагрузки; $\{\ddot{q}\}$, $\{\dot{q}\}$, $\{q\}$ — векторы обобщенных ускорений, скоростей и перемещений узлов конечных элементов, которыми в рассматриваемой задаче выбраны криволинейные стержни радиуса $D_r/2$.

Учет одностороннего характера сил взаимодействия толкателей с ГК и зубьев колес между собой связан с перестроением вектора внешней нагрузки и подчинением найденных значений сил и зазоров системе неравенств, исключающих возможность смены их знаков.

Из-за плавности перехода при нулевой производной от головки циклоидального зуба к его впадине, т.е. там, где при вхождении головки зуба ГК во впадину зуба ЖК, в наибольшей мере реализуется “эффект клина с малым углом раствора”, окружные силы от передаваемого ВМ крутящего момента локализуются в окрестностях этих точек, т.е. точки приложения окружных сил в контактирующих циклоидальных зубьях колес практически лежат на делительной окружности ЖК. Исчезает так называемый “зубцовый момент” [1]. Более подробно алгоритм приведенной задачи рассмотрен в работах [7, 8].

Для определения зазоров и сил между сопрягаемыми зубьями колес, вступающих в контакт или выходящих из контакта, необходимо было определиться с выбором тех точек арок сопряженных зубьев, которые при изменении положения или формы волны деформирования ГК придут в соприкосновение друг с другом или начнут отходить друг от друга. А таких пар всегда две. Одна пара, расположенная со стороны, куда поворачивается волна, вступает в контакт, а вторая пара, расположенная со стороны, откуда поворачивается волна, выходит из контакта. При этом следует иметь в виду, что смена состояния той или иной пары может происходить либо из-за поворота волны, либо из-за дополнительного деформирования ГК под нагрузкой. Для определенности в выборе точек возможного контакта было введено предположение о том, что контуры самих арок циклоид в процессе изменения положения или формы волны деформирования ГК не деформируются и не меняют своей длины. Это обусловлено тем, что, в конечном счете, в соприкосновение всегда вступают точки арок с одинаковыми дуговыми координатами. В этом случае дуговая координата каждой точки арки, соответствующая параметру t_0 , определяется как длина дуги той части арки циклоиды, которая расположена в интервале $0 \leq t \leq t_0$:

$$l_0 = \int_0^{t_0} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \int_0^{t_0} \sqrt{r^2(1 - \cos t)^2 + r^2 \sin^2 t} dt = 2r \int_0^{t_0} \sin \frac{t}{2} dt. \quad (8)$$

При переходе от арки с сопряженными зубьями к арке с зубьями, вступающими в контакт или выходящими из контакта, из геометрии их взаимного положения следует, что между отрезками прямых хорд, соединяющих начальные и конечные концы этих арок, образуется угол, равный

$$\Delta\varphi = \left| \frac{2\pi}{z_{\Gamma}} - \frac{2\pi}{z_{\text{Ж}}} \right|. \quad (9)$$

Здесь $2\pi/z_{\Gamma}$ — угол поворота отрезка прямой хорды ГК, а $2\pi/z_{\text{Ж}}$ — угол поворота отрезка прямой хорды ЖК. Геометрическая составляющая

зазора между сопрягаемыми точками взаимно развернутых хорд арок будет определяться соотношением

$$\Delta_3^r = \left| \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \right| \Delta\varphi, \quad (10)$$

где Δ_3^r — значение зазора, а $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ — расстояние от рассматриваемых точек до начала арок,

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = r\sqrt{(t_0 - \sin t_0)^2 + (1 - \cos t_0)^2}. \quad (11)$$

В момент открытия зазора нормали к сопрягаемым точкам арок разных зубьев развернутся на разный угол, а в момент закрытия зазора нормали к сопрягаемым точкам разных арок — совпадут. Уравнение нормали к циклоиде в локальной системе координат имеет вид [5]

$$y - r(1 - \cos t_0) = \operatorname{tg} \frac{t_0}{2} [x - r(t_0 - \sin t_0)]. \quad (12)$$

Для выявления геометрии взаимных положений сопрягаемых арок циклоид неконтактирующих зубьев используется уравнение касательной к циклоиде

$$y - r(1 - \cos t_0) = \operatorname{ctg} \frac{t_0}{2} [x - r(t_0 - \sin t_0)]. \quad (13)$$

Для расчета контактных напряжений в формуле Герца используется уравнение радиуса кривизны циклоиды

$$\rho = \frac{[1 + (y'_x)^2]^{\frac{3}{2}}}{y''_x}. \quad (14)$$

Здесь y'_x — первая производная y по x , а y''_x — вторая производная y по x :

$$y'_x = y'_t/x'_t = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}; \quad (15)$$

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}. \quad (16)$$

Здесь x'_t и y'_t — производные x и y по параметру t .

Выводы. Разработана расчетная модель циклоидального зубчатого волнового зацепления ВМ. Его основными достоинствами являются: повышенный КПД, снижение более чем в 2 раза нижней границы передаточных отношений ВМ и увеличение быстроходности выходного вала, что позволит существенно расширить область применения ВМ; ожидаемое увеличение нагрузочной способности и усталостного ресурса ВМ за счет снижения контактных напряжений и напряжений в концентраторах и их взаимного разнесения; повышение плавности хода и бесшумности работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванов М.Н.* Волновые зубчатые передачи. М.: Высш. шк., 1981. 184 с.
2. *Гавриленко В.А.* Основы теории эвольвентной зубчатой передачи. М.: Машиностроение, 1969. 432 с.
3. *Клеников С.С., Майков А.И.* Построение согласованной геометрии волновой передачи с круговой формой зубьев // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2009. № 1. С. 3–8.
4. *Фомина Т.А.* Модель для расчета эквивалентных толщин зубчатого венца гибкого колеса с круговой формой зуба и распределения в нем эквивалентных напряжений // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2011. № 6. С. 19–25.
5. *Фролов С.В., Шостак Р.Я.* Курс высшей математики. М.: Высш. шк., 1966. 663 с.
6. *Бояршинов С.В.* Основы строительной механики машин. Л.: Машиностроение, 1973. 456 с.
7. *Клеников С.С., Фомина Т.А.* Динамическая модель для расчета пружинного пакета волнового шагового двигателя // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2010. № 4. С. 23–34.
8. *Клеников С.С., Фомина Т.А.* Расчет динамических деформированных форм колец пружинного пакета волнового шагового двигателя и напряжений в них. № 2011618619. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 27.11.2011.
9. *Самсонович С.Л.* Устройства с волновыми передачами и их применение в машиностроении. М.: Высш. шк., 1985. 48 с.

REFERENCES

- [1] Ivanov M.N. Volnovye zubchatye peredachi [Wave gears]. Moscow, Vyssh. shk. Publ., 1981. 184 p.
- [2] Gavrilenko V.A. Osnovy teorii evol'ventnoy zubchatoy peredachi [Basis of involute gear theory]. placeCityMoscow, Mashinostroenie Publ., 1969. 432 p.
- [3] Klenikov S.S., Maykov A.I. Building of coordinated geometry of wave gear with circular tooth form. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mashinost.* [Proc. Univ., Mech. Eng.], 2009, no. 1, pp. 3–8 (in Russ.).
- [4] Fomina T.A. Model to calculate equivalent thicknesses of flexible gear ring with circular-arc tooth and equivalent stresses distribution in the gear ring. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mashinost.* [Proc. Univ., Mech. placecountry-regionEng.], 2011, no. 6, pp. 19–25 (in Russ.).
- [5] Frolov S.V., Shostak R.Ya. Kurs vysshey matematiki [Course of higher mathematics]. Moscow, Vyssh. shk. Publ., 1966. 663 p.
- [6] Boyarshinov S.V. Osnovy stroitel'noy mekhaniki mashin [Fundamentals of structural mechanics of machines]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1973. 456 p.
- [7] Klenikov S.S., Fomina T.A. Dynamic model to design spiral pack of wave step motor. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Mashinost.* [Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Mech. Eng.], 2010, no. 4, pp. 23–34 (in Russ.).
- [8] Klenikov S.S., Fomina T.A. Analysis of forms of dynamic deformed rings of the wave step motor spiral pack and stresses in them. No. 2011618619. Registered in the Register of Programs 27.11.2011.
- [9] Samsonovich S.L. Ustroystva s volnovymi peredachami i ikh primenenie v mashinostroenii [Devices with wave gears and their application in mechanical engineering]. placeCityMoscow, Vyssh. shkola, 1985. 48 p.

Статья поступила в редакцию 16.09.2014

Клеников Сергей Сергеевич — д-р техн. наук, профессор кафедры “Теория механизмов и машин” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор около 100 научных работ в области динамики и прочности машин, приборов и аппаратуры.
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Российская Федерация, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5.

Klenikov S.S. — Dr. Sci. (Eng.), professor, of the Bauman Moscow State Technical University. Author of about 100 publications in the field of dynamics and strength of machines, instruments, and apparatus.

Bauman Moscow State Technical University, 2-ya Baumanskaya ul. 5, Moscow, 105005 Russian Federation.