

УДК 539.3

А. Е. Белкин, Д. С. Хоминич

РАСЧЕТ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЙ АРОЧНОГО АМОРТИЗАТОРА С УЧЕТОМ ОБЪЕМНОЙ СЖИМАЕМОСТИ РЕЗИНЫ

Представлена теория расчета больших деформаций резиновых деталей амортизаторов методом конечных элементов в смешанной форме с независимой аппроксимацией перемещений и гидростатического давления. Для описания упругости резины применена модель слабосжимаемого неогуковского материала. На примере расчета арочного амортизатора показано, что разработанная математическая модель обеспечивает высокую точность построения нагрузочных характеристик. Приведены результаты расчетного и экспериментального исследований деформаций резиновой детали амортизатора А-2000.

E-mail: a_belkin@newmail.ru

Ключевые слова: арочный амортизатор, резина, слабосжимаемый материал, большие деформации, метод конечных элементов, смешанная формулировка.

В расчетах резинотехнических изделий резину часто рассматривают как несжимаемый материал. Эта модель обеспечивает достаточную точность расчетов, если напряженное состояние резиновой детали характеризуется невысокими значениями компонент шарового тензора напряжений при существенных компонентах девиатора. В низких резинотехнических амортизаторах (рис. 1) вследствие стеснения поперечных деформаций большой объем резины может находиться в условиях всестороннего сжатия. Поэтому предположение об абсолютной несжимаемости резины может привести к значительным погрешностям при определении напряжений и вычислении жесткости амортизатора.

Влияние сжимаемости резины на расчетные характеристики арочных амортизаторов изучалось в работе [1], где численный анализ проводился МКЭ в форме метода перемещений. К сожалению, в задачах со слабосжимаемым материалом применение метода перемещений сопровождается эффектом объемного заклинивания решения с искажением результатов [2]. В настоящей работе для преодоления эффекта заклинивания и повышения точности расчетов применяется МКЭ в смешанной формулировке с независимой аппроксимацией перемещений и гидростатического давления.



Рис. 1. Арочный амортизатор под нагрузкой

Для задач линейной теории упругости система вариационных уравнений смешанного метода имеет вид [2]

$$\int_{\circ V} (\boldsymbol{\sigma}_d : \delta \boldsymbol{\varepsilon}_d + p \delta \varepsilon_v) d^{\circ}V = \delta W_{ext}, \quad \boldsymbol{\sigma}_d = 2G \boldsymbol{\varepsilon}_d, \quad (1)$$

$$\int_{\circ V} (\varepsilon_v - k^{-1}p) \delta p d^{\circ}V = 0, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\sigma}_d$, $\boldsymbol{\varepsilon}_d$ — девиаторы тензоров напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$; p — гидростатическое давление; ε_v — объемная деформация; G , k — модули упругости материала при сдвигах и изменении объема; $\circ V$ — объем тела в недеформированном состоянии; δW_{ext} — виртуальная работа внешних сил.

Уравнения (1) и (2) можно решать МКЭ с помощью двух принципиально различных подходов к аппроксимации гидростатического давления:

- по общим для соседних элементов значениям давления в узлах сетки, что обеспечивает непрерывность давления на межэлементных границах;

- с помощью внутренних, независимых для каждого элемента параметров, без поддержания непрерывности давления на межэлементных границах.

В настоящей работе применена вторая схема, дающая возможность исключить параметры давления на уровне каждого конечного элемента. Для оценки эффективности смешанного метода решены тестовые задачи о плоской деформации деталей из слабосжимаемого материала. Расчеты выполнены с использованием четырехузловых элементов с билинейной аппроксимацией перемещений и постоянным гидростатическим давлением. В качестве примера приведены

результаты решения одной из таких задач — задачи Х.С. Головина [3] об изгибе кругового бруса (рис. 2). На рис. 3, а и б показаны распределения радиальных (σ_r) и окружных (σ_φ) напряжений в сечении А-А бруса, полученные смешанным методом (MIXED) и методом перемещений (DISP), а также соответствующие точному теоретическому решению задачи. Видно, что в отличие от метода перемещений смешанный метод обеспечивает высокую точность даже при ничтожно малой сжимаемости материала, когда коэффициент Пуассона равен 0,4999, а отношение модулей упругости $k/G = 5000$.

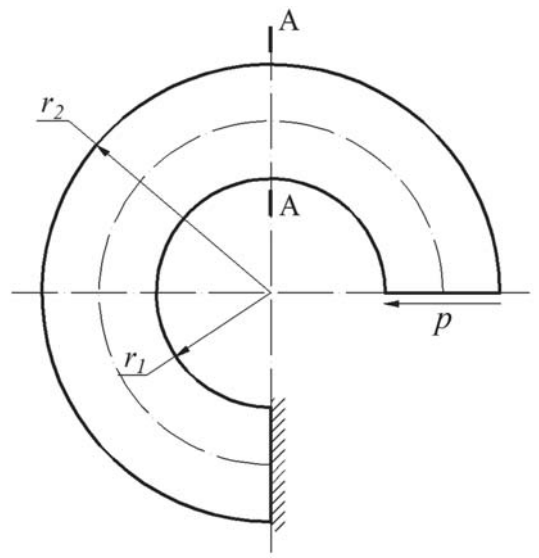


Рис. 2. Схема тестовой задачи о деформациях кругового бруса

Для задач нелинейной теории упругости система вариационных уравнений, аналогичных уравнениям (1) и (2), записывается в следу-

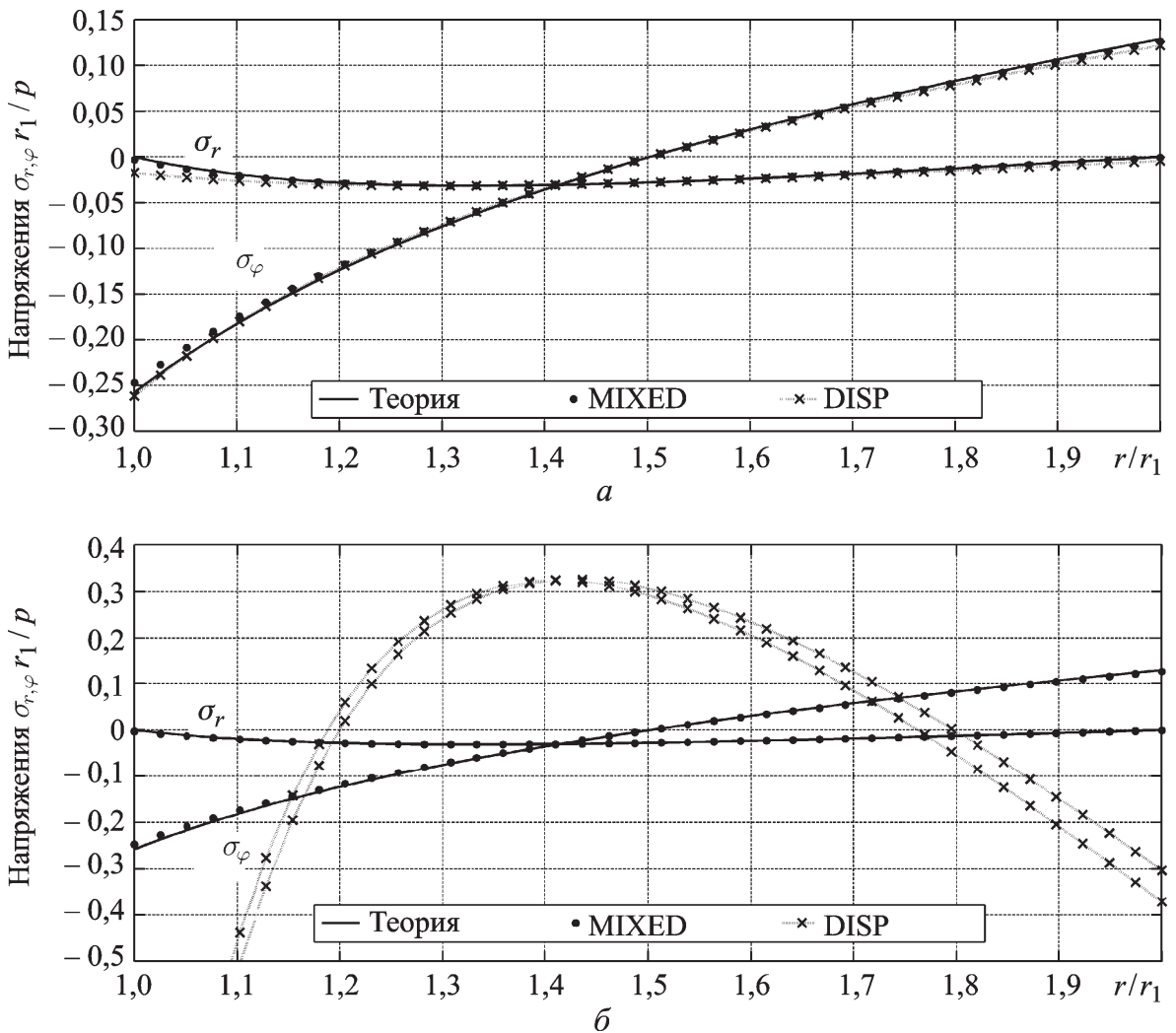


Рис. 3. Распределение напряжений в сечении кривого бруса: коэффициент Пуассона равен 0,45 (а) и 0,4999 (б)

ющем виде [4]:

$$\int_{\circ V} (\mathbf{S}_d + pJ\mathbf{C}^{-1}) : \frac{1}{2}\delta\mathbf{C} d^{\circ}V = \delta W_{ext}; \quad (3)$$

$$\int_{\circ V} (J - 1 - k^{-1}p)\delta p d^{\circ}V = 0, \quad (4)$$

где $\mathbf{S}_d + pJ\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{S}$ — полный тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа; $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ — тензор меры деформаций Коши–Грина; \mathbf{F} — градиент вектора места; $J = \det(\mathbf{F})$ — мера объемной деформации; $\mathbf{S}_d = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}_d \cdot \mathbf{F}^{-1T}$ — часть второго тензора напряжений Пиолы–Кирхгофа, связанная с энергией изохорических деформаций $\hat{\mathbf{C}} = J^{-2/3}\mathbf{C}$.

В качестве модели упругого поведения резины рассматривается слабосжимаемый неогуковский материал с функцией удельной энергии деформации следующего вида:

$$U = \frac{1}{2}G(J^{-2/3}I_{1c} - 3) + \frac{1}{2}k(J - 1)^2, \quad (5)$$

где $I_{1c} = \text{tr}\mathbf{C}$ — первый инвариант тензора меры деформаций.

Первое слагаемое в выражении (5) — это энергия изохорических деформаций, второе слагаемое — энергия изменения объема.

Исходя из упругого потенциала (5), можно получить определяющие соотношения для материала:

$$\mathbf{S}_d = G J^{-2/3}(\mathbf{I} - \frac{1}{3}I_{1c}\mathbf{C}^{-1}), \quad p = k(J - 1). \quad (6)$$

Для иллюстрации закона упругости представим зависимости между напряжениями и удлинениями в осях главных деформаций в компонентной форме:

$$S_1 = GJ^{-2/3} \left(\frac{2}{3}\lambda_1^2 - \frac{1}{3}\lambda_2^2 - \frac{1}{3}\lambda_3^2 \right) \lambda_1^{-2} + pJ\lambda_1^{-2} \quad (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — кратности удлинений, $J = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

Переходя от напряжений Пиолы–Кирхгофа к истинным напряжениям, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= S_1\lambda_1/\lambda_2\lambda_3 = \\ &= GJ^{-5/3} \left(\frac{2}{3}\lambda_1^2 - \frac{1}{3}\lambda_2^2 - \frac{1}{3}\lambda_3^2 \right) + p \quad (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1). \end{aligned} \quad (7)$$

На рис. 4 показаны диаграммы одноосного растяжения-сжатия материала при разных значениях параметра k/G , построенные по зависимостям (7) при условии $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Отметим, что в случае малых деформаций, подчиняющихся закону Гука, отношение объем-

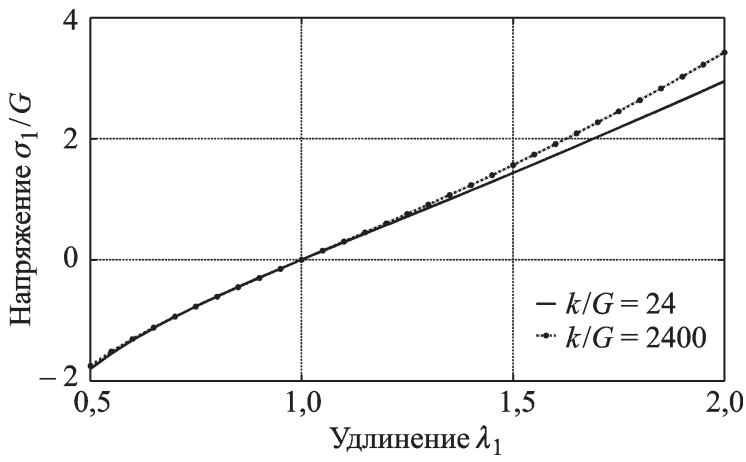


Рис. 4. Диаграммы одноосного растяжения-сжатия сжимаемого неогупковского материала

ного модуля к модулю сдвига выражается через коэффициент Пуассона: $k/G = 2(1 + \nu)/3(1 - 2\nu)$. По значению параметра k/G можно судить о значении коэффициента Пуассона и близости материала к абсолютной несжимаемости с коэффициентом $\nu = 0,5$. В частности, значениям $k/G = 24$ и 2400 , принятым для построения диаграмм на рис. 4, соответствуют значения $\nu = 0,4795$ и $0,4998$.

Для выполнения расчетов по нелинейной теории методом последовательных нагружений проводится линеаризация уравнений (3) и (4) относительно приращений перемещений и гидростатического давления на шаге нагружения. Линеаризованные уравнения имеют вид

$$\int_{\circ V} (\mathbf{S}_d + p\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}) : (\delta\Delta\mathbf{e} + \delta\Delta\boldsymbol{\eta}) d^\circ V + \int_{\circ V} (\mathbf{E}_d : \Delta\mathbf{e}) : \delta\Delta\mathbf{e} d^\circ V +$$

$$+ \int_{\circ V} (\mathbf{E}_p : \Delta\mathbf{e}) : \delta\Delta\mathbf{e} d^\circ V + \int_{\circ V} \Delta p \mathbf{J}\mathbf{C}^{-1} : \delta\Delta\mathbf{e} d^\circ V = \delta W_{ext}, \quad (8)$$

$$\int_{\circ V} (\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1} : \Delta\mathbf{e} - k^{-1}\Delta p) \delta\Delta p d^\circ V = - \int_{\circ V} (J - 1 - k^{-1}p) \delta\Delta p d^\circ V, \quad (9)$$

где $\Delta\mathbf{e}$, $\Delta\boldsymbol{\eta}$ — соответственно линейная и квадратичная относительно приращений перемещений части тензора деформаций $\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta\mathbf{e} + \Delta\boldsymbol{\eta}$ с компонентами

$$\Delta e_{ij} = \frac{1}{2}(\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i} + u_{k,i}\Delta u_{k,j} + u_{k,j}\Delta u_{k,i}), \quad \Delta \eta_{ij} = \frac{1}{2}\Delta u_{k,i}\Delta u_{k,j};$$

$$\mathbf{E}_d = 2 \frac{\partial \mathbf{S}_d}{\partial \mathbf{C}} \text{ — тензор касательных модулей упругости; } \mathbf{E}_p = 2p \frac{\partial (\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1})}{\partial \mathbf{C}}.$$

Расчеты резиновых деталей арочных амортизаторов проводились в рамках гипотезы о плоском деформированном состоянии. Для этого состояния соотношения упругости в компонентной форме запи-

связываются следующим образом:

$$S_{11} = GJ^{-2/3} \left(1 - \frac{1}{3} I_{1C} J^{-2} C_{22} \right) + pJ^{-1} C_{22},$$

$$S_{22} = GJ^{-2/3} \left(1 - \frac{1}{3} I_{1C} J^{-2} C_{11} \right) + pJ^{-1} C_{11},$$

$$S_{12} = \frac{1}{3} GJ^{-8/3} I_{1C} C_{12} - pJ^{-1} C_{12},$$

где $J = \sqrt{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}$, $I_{1C} = C_{11} + C_{22} + 1$.

Далее приведены результаты расчетного и экспериментально-го определения деформаций амортизатора А-2000. В расчетах модули упругости резины имели следующие значения: $G = 1$ МПа, $k = 2400$ МПа. Отметим, что в теории малых деформаций отношению модулей $k/G = 2400$ соответствует значение коэффициента Пуассона 0,4998, весьма близкое к значению 0,5 для абсолютно несжимаемого материала.

На рис. 5 показаны полученные нагрузочные характеристики амортизатора, дающие представление о близости теоретических и экспериментальных результатов. Видно, что смешанный метод обеспечивает весьма точное определение жесткости резиновой детали. В расчетах по методу перемещений жесткость существенно завышается из-за погрешностей в вычислениях объемной деформации и гидростатического давления.

На рис. 6 и 7 показаны изолинии полей деформаций в поперечном сечении амортизатора при осадке 10 мм, полученные с использованием МКЭ. Приведенные результаты соответствуют состоянию резины в области, удаленной от торцов амортизатора, т.е. в его центральной части, где справедлива принятая в расчетах схема плоской деформации.

Вблизи торцов наблюдается существенная депланация поперечных сечений, условие плоской деформации не выполняется. Деформации

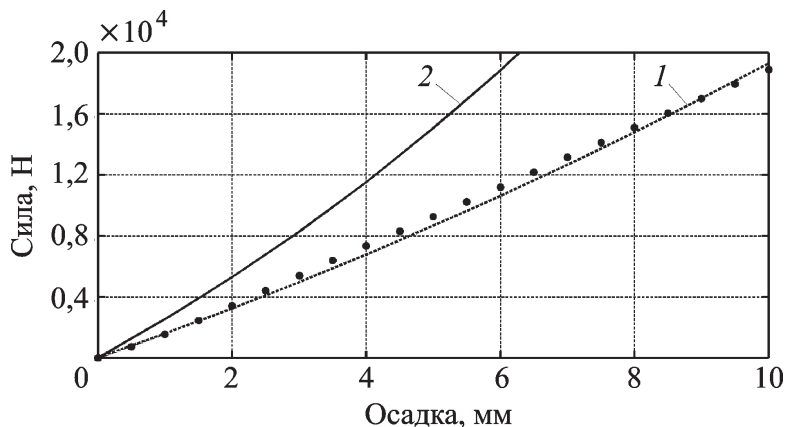


Рис. 5. Нагрузочная характеристика амортизатора А-2000:

точки — результаты эксперимента; кривые 1, 2 — расчетные характеристики, полученные смешанным методом и методом перемещений

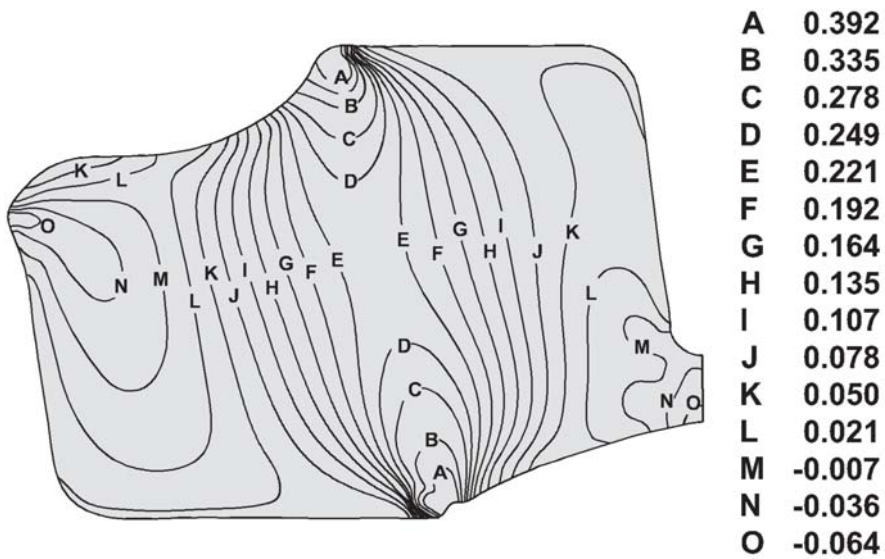


Рис. 6. Деформация $\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(C_{11} - 1)$ в направлении горизонтальной оси (расчет). Левая половина резиновой детали амортизатора

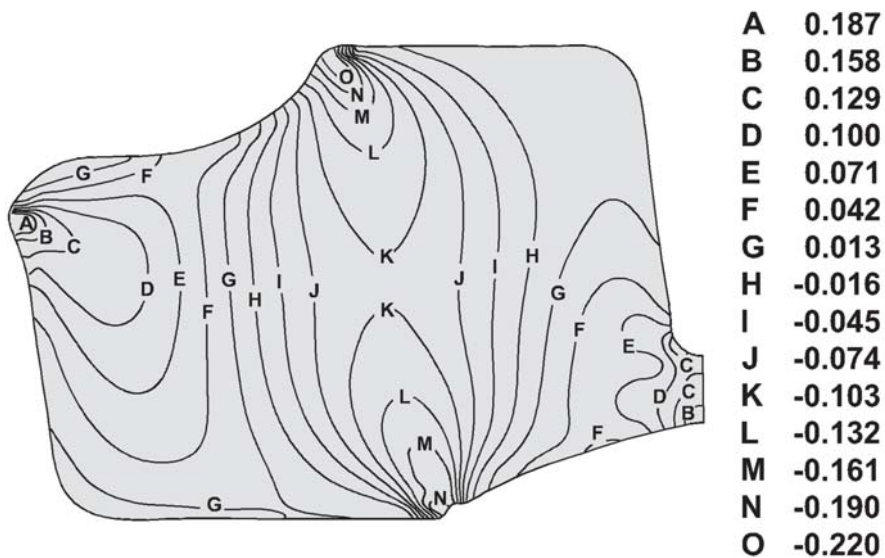


Рис. 7. Деформация $\varepsilon_{22} = \frac{1}{2}(C_{22} - 1)$ в направлении вертикальной оси (расчет)

в плоскости свободного торца амортизатора изучались экспериментально¹ бесконтактным оптическим методом с помощью системы Vic-3D [5]. Результаты эксперимента приведены на рис. 8.

Конечно, в нашем примере прямое сопоставление результатов расчета (см. рис. 6, 7) и эксперимента (см. рис. 8) неправомерно. Вместе с тем в приведенных картинах деформации можно усмотреть качественное согласование, состоящее, например, в расположении зон удлинений и укорочений.

¹Эксперименты проведены в лаборатории кафедры “Прикладная механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана при активном участии сотрудников кафедры Б.В. Букеткина и А.Н. Редникина.

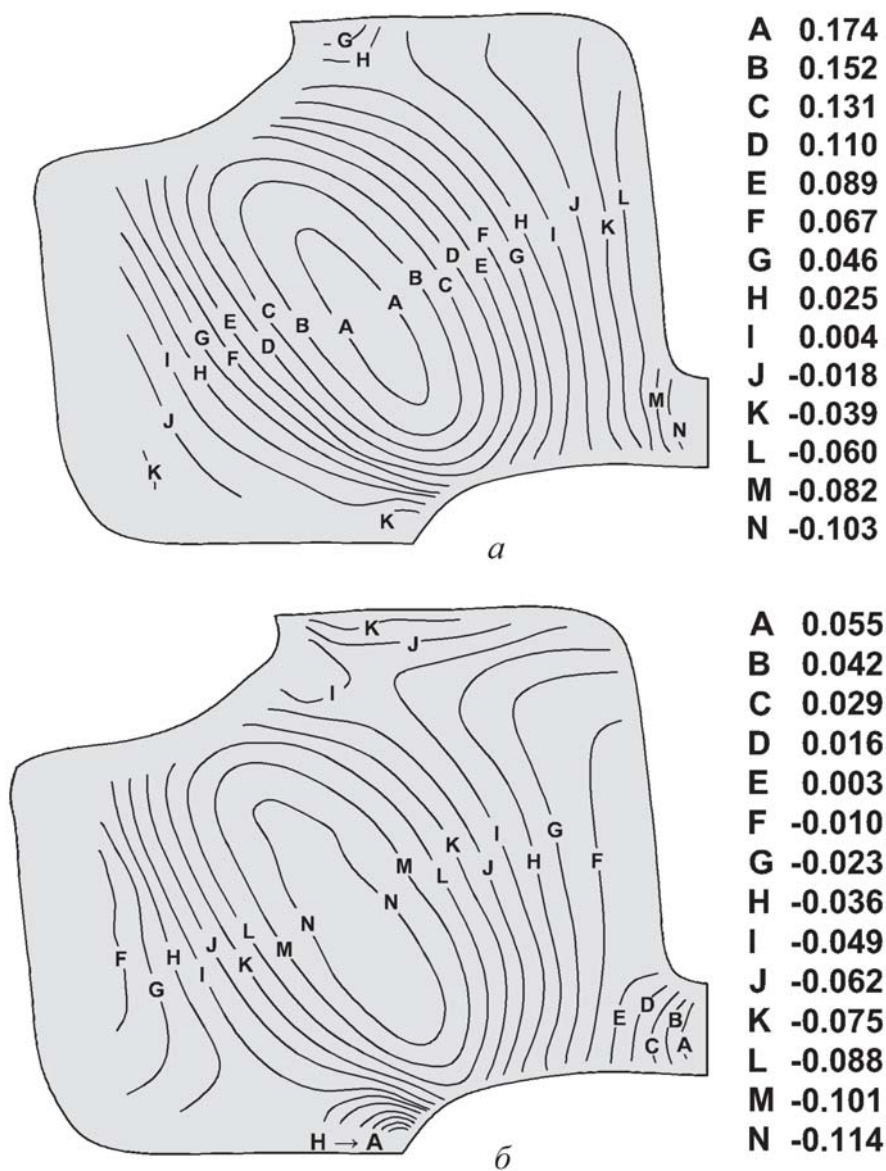


Рис. 8. Деформации ε_{11} (а) и ε_{22} (б) (эксперимент)

В целом полученные расчетные и экспериментальные данные, дополняя друг друга, дают представление о деформациях резиновой детали амортизатора во всем ее объеме.

Вывод. Выполненные расчеты свидетельствуют об удовлетворительных вычислительных свойствах четырехугольных четырехузловых конечных элементов смешанного метода в задачах с возможным объемным заклиниванием из-за малой сжимаемости материала. Разработанная математическая модель обеспечивает весьма точное определение жесткости амортизатора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белкин А. Е., Семенов В. В., Семенов В. К. Численный анализ больших плоских деформаций арочного амортизатора // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. – 2011. – № 2. – С. 55-64.
2. В а т h e К. J. Finite element procedures. – Prentice-Hall, Cliffs. – 1996. – 1036 p.
3. Д е м и д о в С. П. Теория упругости. – М.: Высш. шк., 1979. – 432 с.

4. Голованов А. И., Султанов Л. У. Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых тел. – Казань: Казанский гос. ун-т, 2009. – 465 с.
5. <http://www.correlatedsolutions.com/index.php/products/vic-3d-2010>

Статья поступила в редакцию 9.12.2011

Александр Ефимович Белкин родился в 1951 г., окончил в 1974 г. МВТУ им. Н.Э. Баумана. Д-р техн. наук, профессор кафедры “Прикладная механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 60 научных работ в области численных методов расчета конструкций, механики пневматических шин.

A.Ye. Belkin (b. 1951) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1974. D. Sc. (Eng.), professor of “Applied Mechanics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 60 publications in the field of numerical methods for design of constructions, mechanics of pneumatic tires.

Дмитрий Сергеевич Хоминич родился в 1988 г. Студент-дипломник кафедры “Прикладная механика” МГТУ им. Н.Э. Баумана, инженер ЦИАМ им. П.И. Баранова. Специализируется в области численных методов расчета конструкций и механики композиционных материалов.

D.S. Khominich (b. 1988) – student of “Applied Mechanics” department of the Bauman Moscow State Technical University. Engineer of the Baranov Central Institute of Aviation Motor Development. Specializes in the field of numerical methods for design of constructions, mechanics of pneumatic tires.