

А. К. Е ф р е м о в

## ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ИСПЫТАНИЙ НА ВОЗДЕЙСТВИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВИБРАЦИИ

*Рассмотрена возможность замены широкополосной случайной стационарной вибрации последовательностью узкополосных воздействий. Показано, что одним из критериев эквивалентности при испытаниях на вибропрочность может быть энергия до разрушения объекта, однозначно определяемая при случайном и детерминированном воздействиях. Приведены результаты теоретического и экспериментального исследований и компьютерного моделирования.*

**E-mail:** efrac@mail.ru

**Ключевые слова:** испытания, случайная вибрация, реакция объекта, критерий эквивалентности.

В практике испытаний изделий на механические воздействия весьма актуален вопрос об обосновании возможности проведения так называемых эквивалентных испытаний. Необходимость в этом возникает, если по каким-либо причинам (чаще всего обусловленным ограниченностью эксплуатационных характеристик имеющегося оборудования) не удастся полностью воспроизвести параметры заданных реальных воздействий. В этом случае их заменяют доступными, но при условии одинаковости реакции объекта испытаний в том или ином смысле в обоих случаях. Задача, связанная с выбором количественного критерия эквивалентности условий испытаний, предполагает использование адекватных математических моделей воздействия и объекта испытаний, чтобы теоретически исследовать реакцию (отклик) последнего на заданные воздействия. Общая теория эквивалентных испытаний до сих пор не разработана, обычно рассматривается общая постановка задачи и приводятся частные примеры возможного ее решения [1–3].

В качестве критерия эквивалентности необходимо выбрать тот или иной конечный (интегральный) параметр реакции объекта испытаний. Например, в работе [4] показано, что, используя неоднозначность ударного спектра реакции объекта, можно обеспечить равенство максимального уровня реакции (в виде деформации или смещения) при воздействии импульса меньшей длительности, чем реальный, что дает большой эффект по энергетике испытательного оборудования. Это равенство может быть обеспечено также путем подбора стендовых параметров воздействия заданной формы. При таком подходе следует учитывать неодинаковость развития реакции объекта во времени. Классической считается задача об эквивалентности стационарной узкополосной случайной, и детерминированной вибрации, постоянной

или переменной (качающейся) в узком диапазоне частоты, однако при установлении условий эквивалентности приравниваются параметры воздействия, имеющие разную феноменологическую природу (например, амплитуда и среднеквадратическое отклонение), к тому же без учета реакции объекта.

**Испытание на виброустойчивость.** Рассмотрим сначала возможность решения этой задачи путем замены широкополосной вибрации последовательностью узкополосных воздействий. Количественно стационарный случайный процесс  $X(t)$  описывают известной парой интегральных преобразований Винера–Хинчина [5]:

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = 2 \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega;$$

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau,$$

где  $K_x(\tau)$  — корреляционная функция;  $S_x(\omega)$  — спектральная плотность. С практической точки зрения удобнее пользоваться частотой  $f$ , измеряемой в герцах, тогда получим

$$\begin{aligned} K_x(\tau) &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{S}_x(f) e^{j2\pi f\tau} df = 2 \int_0^{\infty} \bar{S}_x(f) \cos(2\pi f\tau) df, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\bar{S}_x(f) = 2\pi S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = 2 \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau.$$

При этом дисперсия, являющаяся мерой мощности процесса, согласно (1) равна

$$D_x = \sigma_x^2 = K_x(0) = 2 \int_0^{\infty} \bar{S}_x(f) df, \quad (2)$$

где  $\sigma_x$  — среднеквадратическое отклонение (СКО).

На практике исходную спектральную плотность чаще всего задают в положительной области частот, т.е. в виде зависимости  $2\bar{S}_x(f)$ . При ограничении длительности реализации процесса и рассматриваемого частотного диапазона в приведенных формулах указываются конкрет-

ные пределы интегрирования. Так, если спектральная плотность задана в пределах диапазона, ограниченного частотой среза  $f_c$ , то при разбиении этого интервала на  $n$  поддиапазонов одинаковой ширины  $\delta f$  с учетом (2) можно записать

$$D_x = 2 \int_0^{f_c} \bar{S}_x(f) df = 2 \sum_{i=1}^n \int_{f_i}^{f_i+\delta f} \bar{S}_x(f) df = \sum_{i=1}^n D_{xi},$$

где

$$D_{xi} = \sigma_{xi}^2 = K_{xi}(0) = 2 \int_{f_i}^{f_i+\delta f} \bar{S}_x(f) df = 2\bar{S}_{xi}\delta f \quad (3)$$

— парциальная дисперсия. Отсюда формально следует, что дисперсия исходного воздействия равна сумме дисперсий составляющих, заданных в пределах поддиапазонов, и оба варианта должны быть эквивалентными с точки зрения суммарной реакции объекта испытаний. Однако это будет справедливо, лишь если все полосовые воздействия, например вырезаемые из белого шума, будут поступать на вход исследуемого объекта одновременно.

Представим входное центрированное случайное воздействие в виде канонического разложения В.С. Пугачева [5, 6]:

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t) = \sum v_i \varphi_i(t),$$

где  $v_i$  — случайные некоррелированные коэффициенты с математическими ожиданиями, равными нулю;  $\varphi_i(t)$  — детерминированные (координатные) функции;  $m_x(t)$  — математическое ожидание. Каноническое разложение корреляционной функций такого процесса имеет вид

$$K_x(t_1, t_2) = \sum D_i \varphi_i(t_1) \varphi_i(t_2),$$

где  $D_i$  — дисперсии коэффициентов  $v_i$ , а дисперсия процесса при  $t_1 = t_2 = t$

$$D_x(t) = \sum D_i \varphi_i^2(t).$$

Как известно, в каноническом разложении стационарного случайного процесса фигурируют гармонические функции времени с частотами, кратными  $\pi/T$  ( $T$  — длительность реализации), и в этом случае  $D_x = \sum D_i = \text{const}$ . При подаче такого процесса на вход линейной системы с оператором  $W$  реакция

$$\overset{\circ}{Y}(t) = W \left\{ \overset{\circ}{X} \right\} = \overset{\circ}{Y}(t) = \sum v_i W \{ \varphi_i(t) \} = \sum v_i \psi_i(t) \quad (4)$$

также будет представлена в виде канонического разложения по но-

вым координатным функциям  $\psi_i(t)$ . Если входное воздействие — это последовательность процессов равной длительности  $T$ , то его можно представить в виде

$$\dot{X}(t) = \sum \dot{X}_j(t - T_j) = \sum \sum v_{ij} \varphi_{ij}(t - T_j),$$

где  $T_j = (j - 1)T$ . Тогда на выходе получим

$$\dot{Y}(t) = \sum \dot{Y}_j(t - T_j) = \sum \sum v_{ij} \psi_{ij}(t - T_j). \quad (5)$$

Этот процесс будет иметь весьма сложную структуру: он состоит из переходных колебаний, возбуждаемых сдвинутыми во времени воздействиями ограниченной длительности ( $T_j \leq t \leq T_j + T$ ), и постепенно затухающих во времени (если система устойчива) и установившихся колебаний. Однако  $\dot{Y}(t)$  в общем случае нельзя считать стационарным процессом, этот факт отмечается в работе [7], где анализируется реакция линейной системы на воздействие нескольких случайных стационарных воздействий; приведенную там формулу для дисперсии реакции (см. [7], формула (5.553)) в рассматриваемом случае можно представить в виде

$$D_Y(t) = \sum \sum \int_0^t g_i(\tau_1) \left[ \int_0^t g_j(\tau_2) K_{X_i X_j}(\tau_2 - \tau_1) d\tau_2 \right] d\tau_1,$$

где  $g(t)$  — импульсная переходная функция системы. Очевидно, что эквивалентность воздействия в данном случае может быть обеспечена при равенстве (или допустимом отличии) каких-либо характеристик реакции объекта, определяемых по формулам (4) и (5) соответственно. Для такого сравнения необходима адекватная математическая модель объекта испытаний, поскольку количественная оценка реакции возможна, если известна передаточная функция (комплексный коэффициент передачи) системы либо импульсная переходная функция, которая может быть определена только экспериментально. Поэтому задача обоснования количественного критерия эквивалентности при таком воздействии становится практически неразрешимой.

Следует отметить, что именно такая задача возникла на практике. На предприятии ОАО “Импульс” в связи с организацией испытаний одного из изделий на воздействие случайной квазистационарной вибрации с заданной (широкополосной) спектральной плотностью. Из-за отсутствия технической возможности формирования такого воздействия предлагалось заменить его последовательностью узкополосных случайных вибрационных воздействий, имеющих ограниченную длительность. Заданный заказчиком закон спектральной плотности в виде  $2\bar{S}_x(f)$  представлен в табл. 1, а программа воспроизведения его при

**Квазистационарная высокочастотная случайная вибрация**

Поддиапазоны частот, Гц	Спектральная плотность виброускорения $S_x, g^2/\text{Гц}$
20... 50	0,08... 0,2
50... 100	0,2... 0,4
100... 200	0,4
200... 500	0,4... 0,16
500... 1000	0,16... 0,08
1000... 2000	0,08... 0,04

Примечание. Общая продолжительность действия 600 с.

**Результаты испытаний изделий на воздействие случайной вибрации**

Поддиапазоны частот, Гц	Спектральная плотность ускорения $S_x, g^2/\text{Гц}$	Среднеквадратическое значение ускорения $\sigma_x, g$
20... 30	0,08	0,9
30... 50	0,2	2,0
50... 70	0,2	2,0
70... 100	0,4	3,46
100... 250	0,4	4,47 (3)
250... 300	0,32	4,0
300... 350	0,3	3,9
350... 400	0,25	3,5
400... 450	0,2	3,16
450... 550	0,16	2,83 (2)
550... 600	0,14	2,65
600... 650	0,12	2,45
650... 700	0,11	2,35
700... 800	0,10	3,16
800... 1400	0,08	2,82 (6)
1400... 1700	0,06	2,45 (3)
1700... 2000	0,04	2,0 (3)

Примечание. Длительность вибрации в каждом поддиапазоне около 20 с; в скобках указано число равных частотных интервалов в поддиапазоне при постоянстве уровня спектральной плотности.

испытаниях — в табл. 2. Весь частотный диапазон разбит на узкополосные поддиапазоны, и на вход объекта следовало подавать соответствующие вибрации продолжительностью  $T \approx 20$  с. Приведенные в табл. 2 среднеквадратические значения ускорения рассчитывались по формуле (3):

$$\sigma_{xi} = \sqrt{2 (\bar{S}_{xi})_{cp} \delta f}.$$

Табличные данные были обработаны в среде математического компьютерного пакета MathCAD, построение графиков спектральных плотностей проводилось путем усреднения значений в пределах заданных частотных диапазонов. Эти графики практически совпадают, что наглядно видно при их совмещении на рис. 1, где цифрами 1 и 2 отмечены данные, относящиеся к табл. 1 и 2 соответственно.

Согласно зависимости (1) можно записать

$$K_x(\tau) = 2 \int_0^{f_c} \bar{S}_x(f) \cos(2\pi f\tau) df, \quad (6)$$

где  $f_c = 2000$  Гц — частота среза. Для вычисления данного интеграла необходимо ввести некоторую аналитическую аппроксимацию зависимости  $2\bar{S}_x(f)$ . Сначала преобразуем подынтегральное выражение:

$$\tilde{S}_x(f) = \frac{2\bar{S}_x(f)}{[2\bar{S}_x(f)]_{\max}}; \quad \bar{f} = \frac{f}{f_0},$$

где  $f_0$  — частота, соответствующая максимуму заданной спектральной плотности. Как следует из данных табл. 1,  $f_0 \approx 200$  Гц и соответственно  $\bar{f}_c \approx 10$ . В результате формула (6) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_x(\tau) &= \frac{K_x(\tau)}{[2\bar{S}_x(f)]_{\max} f_0} = \int_0^{\bar{f}_c} \tilde{S}(\bar{f}) \cos(2\pi f_0 \bar{f} \tau) d\bar{f} = \\ &= \int_0^{\bar{f}_c} \tilde{S}(\bar{f}) \cos(\alpha \bar{f} \tau) d\bar{f}, \end{aligned}$$

где  $\alpha = 2\pi f_0 \cdot 10^{-3}, \text{мс}^{-1}$ . Данный подход упрощает вычисления, поскольку используются нормированные (безразмерные) величины, за

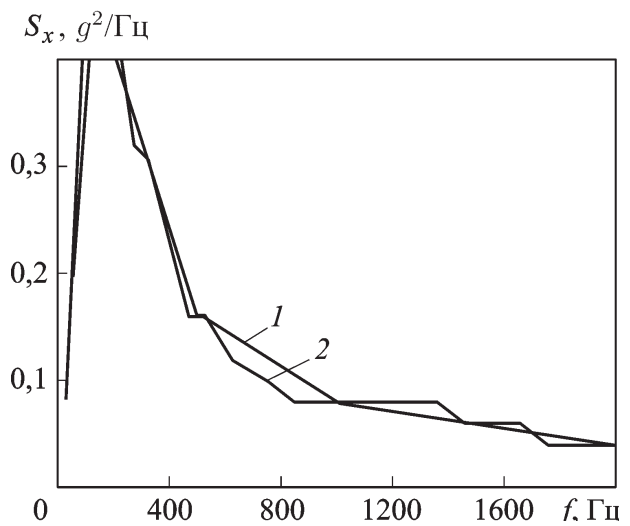
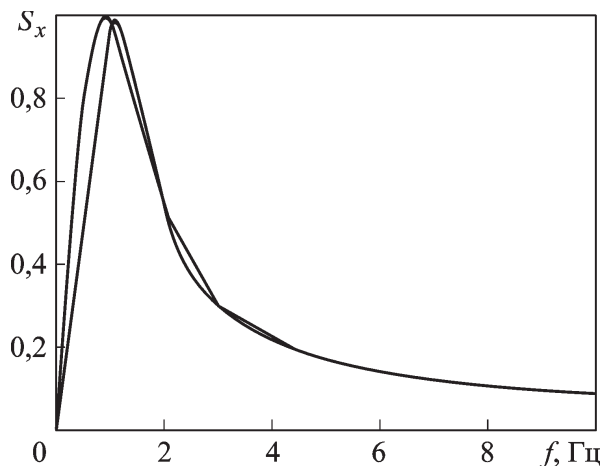
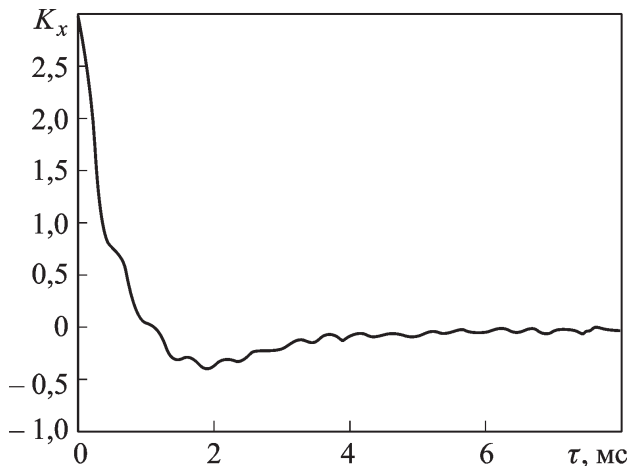


Рис. 1. Графики спектральной плотности (1 и 2 — см. табл. 1 и 2)



**Рис. 2. Интерполяция кубическими сплайнами**



**Рис. 3. Нормированная корреляционная функция**

исключением  $\tau$ . Размерность  $\tau$  сохранена для определения интервала корреляции из условия  $K_x(\tau_0) = 0$ . Известно, чтобы статистические свойства стационарного случайного процесса были близки к истинным, длительность реализации должна не менее чем в 3–4 раза превышать  $\tau_0$ . Последующие вычисления вновь организуем в среде MathCAD, воспользовавшись методом интерполяции кубическими сплайнами (рис. 2). На рис. 3 представлена нормированная корреляционная функция. Видно, что интервал корреляции  $\tau_0 \approx 1$  мс, т.е. длительность реализации при испытаниях должна быть не менее 3...4 мс; очевидно, что это требование на практике заведомо будет выполнено.

Представим для наглядности объект испытаний в виде простейшего одномерного осциллятора (колебательной системы с одной степенью свободы), описываемого известным уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2h \frac{dx}{dt} + \Omega^2 x = gk(t),$$

где  $x$  — реакция (отклик) объекта (для механической системы это смещение или деформация);  $2h$  — коэффициент демпфирования;  $\Omega = 2\pi F_0$  — круговая частота собственных колебаний;  $F_0$  — доминирующая собственная частота;  $k(t)$  — закон внешнего воздействия в виде перегрузки. Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) такой системы имеет вид

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{g}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + (2h)^2 \omega^2}},$$

где  $W(j\omega)$  — комплексный коэффициент передачи системы. Из теории преобразования стационарных сигналов линейными системами известно, что спектральные плотности реакции  $X$  и входного воздействия  $Y$  связаны соотношением

$$S_x(\omega) = S_y(\omega) A^2(\omega),$$

т.е. дисперсия реакции

$$D_x = \sigma_x^2 = \int_0^{\omega_c} S_y(\omega) A^2(\omega) d\omega. \quad (7)$$

Пусть заданная спектральная плотность  $S_y(\omega)$  разбита на поддиапазоны и при испытаниях воспроизводится лишь соответствующий узкополосный случайный процесс с усредненной в пределах  $i$ -го поддиапазона спектральной плотностью  $S_{yi}$ , причем можно считать, особенно при относительно узкой ширине поддиапазона, что  $S_{yi} = S(\omega_i)$ . Тогда дисперсия соответствующей реакции системы будет равна

$$D_{xi} = \sigma_{xi}^2 = \int_{\omega_i}^{\omega_i+\delta\omega} S_x(\omega) d\omega \approx S_{yi} \int_{\omega_i}^{\omega_i+\delta\omega} A^2(\omega) d\omega.$$

Отсюда видно, что полосовая спектральная плотность как бы вырезает площади определенных участков квадрата АЧХ системы.

Таким образом, поставленная задача в рассмотренном случае сводится к сравнению полной дисперсии реакции, определяемой по формуле (7), со значениями  $D_{xi}$  и соответствующими СКО:  $\sigma_x = \sqrt{D_x}$  и  $\sigma_{xi} = \sqrt{D_{xi}}$ . При этом очевидно, что большее значение будет иметь собственная (резонансная) частота объекта по отношению к частоте среза  $f_c$ . Для исключения размерных величин преобразуем выражение (7) следующим образом:

$$D_x = 2\pi f_0 (S_y)_{\max} W^2(0) \int_0^{\bar{f}_c} \bar{S}_y(\bar{f}) \bar{W}^2(\bar{f}) d\bar{f},$$

где  $W(0) = g/\omega_0^2$  — статическая АЧХ объекта;

$$\bar{W}(\bar{f}) = \frac{W(\omega)}{W(0)} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\beta\bar{f})^2]^2 + (\varepsilon\beta\bar{f})^2}}; \quad \varepsilon = \frac{2h}{\Omega}; \quad \beta = \frac{f_0}{F_0}.$$

Таким образом, из выражения (7) получим

$$\tilde{D}_x = \tilde{\sigma}_x^2 = \frac{D_x}{2\pi f_0 (S_y)_{\max} W^2(0)} = \int_0^{\bar{f}_c} \bar{S}_y(\bar{f}) \bar{W}^2(\bar{f}) d\bar{f}, \quad (8)$$

а для  $i$ -го полосового воздействия

$$\tilde{D}_{xi} = \tilde{\sigma}_{xi}^2 = \bar{S}_{yi} \int_{\bar{f}_i}^{\bar{f}_i+\delta\bar{f}} [\bar{W}(\bar{f})]^2 d\bar{f}.$$



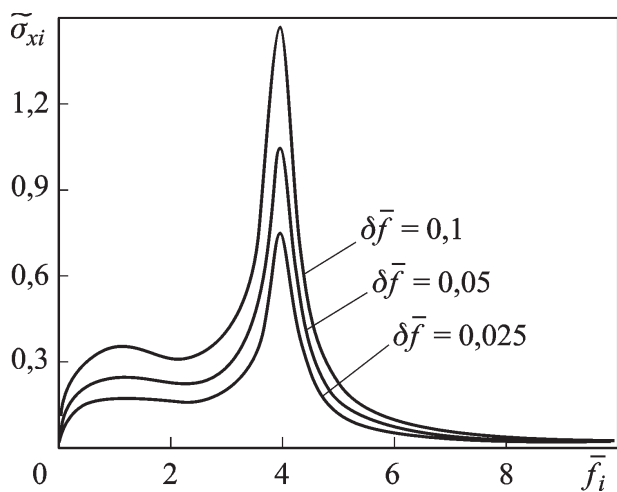


Рис. 4. СКО для узкополосной вибрации

в пределах ширины поддиапазона, особенно при размытом резонансном пике, т.е. на практике вполне приемлемо следующее выражение для дисперсии реакции на узкополосное воздействие:

$$\tilde{D}_{xi} = \tilde{\sigma}_{xi}^2 = \bar{S}_{yi} (\bar{W}_i)^2 \delta \bar{f},$$

где можно принять  $\bar{W}_i = [\bar{W}(\bar{f}_i) + \bar{W}(\bar{f}_i + \delta \bar{f})] / 2$ . Расчет по зависимости (8) дает следующий результат:  $\bar{D}_x = 15,56$ ;  $\tilde{\sigma}_x = 3,945$ . Эквивалентными заданное широкополосное воздействие и совокупность узкополосных воздействий можно, очевидно, считать только в том случае, если последние поступают на вход объекта одновременно. При подаче их на вход с временным сдвигом эквивалентность не может быть обеспечена. В связи с этим возможна следующая, несколько искусственная, постановка задачи испытания. Если характерная (доминирующая) резонансная частота объекта известна, то в качестве эквивалентного полосового воздействия можно использовать такое, средняя частота спектральной плотности которого близка к резонансной частоте объекта, а уровень должен быть выбран с таким расчетом, чтобы СКО соответствовало случаю возбуждения широкополосным воздействием. При этом энергоемкость эквивалентного воздействия может оказаться соизмеримой с энергоемкостью реального воздействия. Следует также учитывать, что законы изменения соответствующих (эквивалентных по СКО) узко- и широкополосного воздействий во времени будут в среднем различны.

Корреляционные функции реакции на широкополосное и узкополосное воздействия имеют вид

$$\tilde{K}_x(\tau) = \int_0^{\bar{f}_c} \bar{S}_y(\bar{f}) \bar{W}^2(\bar{f}) \cos(\alpha \bar{f} \tau) d\bar{f};$$

Принимаем для конкретности значения  $\varepsilon = 0,1$  и  $\beta = 0,25$  (т.е.  $F_0 = 4f_0 = 800$  Гц), АЧХ при таких параметрах будет иметь четко выраженный резонансный пик. На рис. 4 представлены зависимости  $\tilde{\sigma}_{xi}(\bar{f}_i)$  при трех значениях ширины частотных поддиапазонов: 50, 100 и 200 Гц, что соответствует  $\delta \bar{f} = 0,025; 0,05; 0,1$ . Следует отметить, что практически совпадающие результаты получаются и при усреднении АЧХ

$$\tilde{K}_{xi}(\tau) = \bar{S}_{yi} \int_{f_i}^{\bar{f}_i + \delta \bar{f}} \bar{W}^2(\bar{f}) \cos(\alpha \bar{f} \tau) d\bar{f}.$$

Если во втором выражении заменить  $\bar{W}^2(\bar{f})$  его средним значением, то полосовая корреляционная функция будет пропорциональна интегралу

$$\begin{aligned} \int_{\bar{f}_i}^{\bar{f}_i + \delta \bar{f}} \cos(\alpha \bar{f} \tau) d\bar{f} &= \\ &= 2 \left( \bar{f}_i + \frac{\delta \bar{f}}{2} \right) \cos \frac{\alpha (\delta \bar{f}) \tau \sin \left[ \alpha \left( \bar{f}_i + \frac{\delta \bar{f}}{2} \right) \tau \right]}{2 \alpha \left( \bar{f}_i + \frac{\delta \bar{f}}{2} \right) \tau} \approx \\ &\approx 2 \bar{f}_i \cos \frac{\alpha (\delta \bar{f}) \tau \sin(\alpha \bar{f}_i \tau)}{2 \alpha \bar{f}_i \tau}, \end{aligned}$$

т.е. корреляционная функция представляет собой относительно высокочастотную функцию типа  $\frac{\sin x}{x}$  с низкочастотной огибающей.

**Испытания на вибропрочность.** Основные результаты исследования закономерностей усталостного разрушения достаточно полно обобщены, например в работах [8–10]. Наиболее распространен подход, основанный на использовании кривых (линий) Велера, устанавливающих зависимость напряжения разрушения от числа циклов изменения нагрузки. Усталостные свойства различных материалов определяют при использовании стандартных образцов. Согласно теории линейного накопления усталостных повреждений (гипотеза Майнера), условие появления трещин записывается в виде

$$S = \sum \frac{n(\sigma_k)}{N(\sigma_k)} \geq 1, \quad (9)$$

где  $n$  — число циклов при амплитуде напряжения  $\sigma_k$ ;  $N$  — число циклов, соответствующих моменту возникновения трещин при той же амплитуде напряжения. Известные экспериментальные данные не опровергают правило линейного суммирования как статистическую гипотезу [8]. Рассматривая проблему установления условий эквивалентности нагружения конструкции в реальных и лабораторных условиях, авторы работы [2] связывают действующие напряжения и ускорения линейной зависимостью и ориентируются на резонансную частоту  $f_0$  конструкции, представленной в виде колебательной системы с одной степенью свободы. В этой работе исходными также являются кривые Велера и линейный закон накопления повреждений. В работе [10] при установлении эквивалентности предлагается заменять дей-

ствительное усталостное повреждение при случайном процессе нагружения (пренебрегая реализационным рассеянием) средним значением и считать его детерминированным.

Указанные подходы не позволяют решить основную инженерную задачу — прогнозировать вибропрочность конструкции в реальных условиях ее эксплуатации. Недостатки этих подходов сводятся в основном к следующему:

— результаты испытаний стандартных образцов в большинстве случаев невозможно распространить на реальные конструкции;

— кривые Велера не учитывают частоту возмущения, а имеющиеся сведения о влиянии частоты нагрузки на усталостную прочность крайне недостаточны;

— основной характеристикой усталостной прочности является напряженное состояние образца, однако взаимосвязь между амплитудами напряжения и ускорения может быть установлена не всегда, что также затрудняет пересчет на реальные условия эксплуатации конструкции. Я.Б. Фридман, отмечая повышение усталостной прочности в области малых и средних частот, связывает это явление с увеличением скорости деформирования и нагружения по мере возрастания частоты [11].

Иной подход к оценке вибропрочности конструкции можно обосновать следующим образом. Любую конструкцию с этой точки зрения можно охарактеризовать некоторым пороговым (критическим) состоянием. Разрушение (выход из строя) конструкции происходит в том случае, если при циклически изменяющемся воздействии параметры указанного порогового состояния будут превышены в результате накопления остаточных (усталостных) эффектов. Таким образом, решающим является не механизм развития этих эффектов, а сам факт выхода конструкции из строя. Такую модель усталостного разрушения называют феноменологической: мера повреждения  $v$  ( $0 \leq v \leq 1$ ) вводится аксиоматически. Обычно считают, что мера подчиняется кинетическому уравнению

$$\frac{dv}{dt} = f(v, S),$$

где  $S(t)$  — характеристика нагрузки. Задачи оценки усталостной прочности можно также решить с помощью теории надежности (кумулятивная модель отказов) и выбросов (минимальное время выхода вектора  $\bar{v}$  за пределы заданной области  $\Omega$ ) [8].

Момент разрушения зависит от параметров воздействия и свойств системы. Следовательно, задача сводится к выбору такого критерия, который объединял бы характеристики воздействия и конструкции независимо от их специфических особенностей. Единственно возможным в этом смысле является энергетический критерий, включающий

в себя энергию воздействия до разрушения конструкции  $\mathcal{E}$ . Последняя же определяется однозначно при воздействии  $a(t)$  любого вида и известном времени до разрушения (долговечности)  $T_p$ . Действительно, при детерминированном воздействии

$$\mathcal{E} = \int_0^{T_p} a^2(t) dt,$$

а при полигармоническом (периодическом)

$$\mathcal{E} = \overline{a^2(t)} T_p,$$

где  $\overline{a^2(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T a^2(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k^2/2)$  — средняя (за период  $T$ ) мощность воздействия, а  $c_k$  — амплитуда  $k$ -й гармоники. Очевидно, что

число циклов изменения воздействия до разрушения  $N = f_1 T_p$ , где  $f_1 = 1/T$  — частота основной гармоники. При нестационарном случайном воздействии

$$\mathcal{E} = \int_0^{T_p} D(t) dt.$$

Наконец, при стационарном возмущении (дисперсия как мера мощности процесса постоянна)

$$\mathcal{E} = D T_p.$$

Следовательно, энергия до разрушения может служить обобщенной характеристикой порогового состояния конструкции, она определяется однозначно при любом характере воздействия и интегрально учитывает все специфические особенности как воздействия, так и конструкции и, следовательно, дает косвенное описание напряженного состояния. Отсюда же следует и вывод о принципиальной возможности обоснования эквивалентных условий нагружения конструкции. Критерием усталостной прочности может быть некоторый комплекс, зависящий от  $\mathcal{E}$ , количественные значения которого должны быть инвариантными для нагрузок различного вида при выполнении соответствующих условий. Выявление структуры такого критерия представляет собой весьма сложную задачу. Значение  $\mathcal{E}$  при прочих равных условиях многократных опытов будет неизбежно иметь разброс, расчетным может быть среднее или наиболее вероятное значение.

Очень важен вопрос о влиянии спектральных особенностей воздействия. Например, при стационарном воздействии время до разрушения  $T_p$  будет существенно зависеть (при одинаковой дисперсии) от структуры спектральной плотности  $S(\omega)$ . Ее специфические особен-

ности могут быть охарактеризованы с помощью спектрокорреляционной функции (СКФ) [12]

$$\psi_x(\Delta\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega - \Delta\omega) S_x(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_x^2(\tau) e^{-j\Delta\omega\tau} d\tau;$$

СКФ соответствует интегральное преобразование

$$k_x^2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\Delta\omega) e^{j(\Delta\omega)\tau} d(\Delta\omega).$$

Показано, что СКФ улавливает достаточно тонкие различия в форме  $S_x(\omega)$  для процессов, имеющих одинаковую дисперсию.

Энергетический подход позволяет преобразовать некоторые из известных соотношений в теории усталостной прочности. Например, закон линейного накопления повреждений (9) можно представить в виде

$$S = \sum_k \frac{t_k f_k \sigma_k^2}{2 f_k \mathcal{E}(f_k)} = \sum_k \frac{\sigma_k^2 t_k}{2 \mathcal{E}(f_k)} = \sum_k \frac{\mathcal{E}_k}{\mathcal{E}(f_k)},$$

где  $\mathcal{E}_k$  — энергия воздействия длительностью  $t_k$ ;  $\mathcal{E}(f_k)$  — энергия разрушения на частоте  $f_k$ .

В работе О.Ф. Трофимова [13] дана количественная оценка накопления повреждений, основанная на сопоставлении энергетической структуры случайных процессов:

$$\frac{T_p m_2^{3/2}}{m_4^{1/2}} = T_p \sqrt{\frac{m_2}{m_4}} = \text{const}, \quad (10)$$

где  $m_k = \int_0^{\infty} \omega^k S(\omega) d\omega$  — моменты спектральной плотности. С учетом того, что

$$m_2 = \int_0^{\infty} \omega^2 S(\omega) d\omega = -k''(0), \quad m_4 = \int_0^{\infty} \omega^4 S(\omega) d\omega = k^{IV}(0),$$

выражение (10) можно представить в виде

$$T_p \sqrt{-\frac{[k''(0)]^3}{k^{IV}(0)}} = \text{const}.$$

Предлагаемая оценка накладывает определенные ограничения на вид корреляционной функции, которая, в частности, должна быть четырежды дифференцируемой в начале координат. Этому условию, как известно, удовлетворяют процессы достаточно узкого класса.

Если ввести нормированную по дисперсии корреляционную функцию  $\rho(\tau) = k(\tau)/D$ , то  $k''(0) = D\rho''(0)$  и  $k^{IV} = D\rho^{IV}(0)$ ; тогда

$$T_p \sqrt{-\frac{[k''(0)]^3}{k^{IV}(0)}} = \frac{1}{2}DT_p \cdot 2\sqrt{-\frac{[\rho''(0)]^3}{\rho^{IV}(0)}} = 2\mathcal{E} \sqrt{-\frac{[\rho''(0)]^3}{\rho^{IV}(0)}} = \text{const.} \quad (11)$$

Видно, что энергия разрушения непосредственно входит в этот комплекс, в принципе являющийся разновидностью критерия усталостной прочности при стационарном случайном воздействии. Если принять  $\rho(\tau) = \exp(-\beta^2\tau)$ , то  $\rho''(0) = -2\beta^2$  и  $\rho^{IV}(0) = 12\beta^4$  и соответственно

$$\sqrt{-\frac{[\rho''(0)]^3}{\rho^{IV}(0)}} = \beta\sqrt{\frac{2}{3}},$$

а критерий (11) приобретает вид  $\mathcal{E}\beta = \text{const}$ . Адекватность соотношений подобного типа должна быть подтверждена экспериментально.

Некоторые предварительные данные получены в процессе исследования усталостной прочности специальных образцов при гармоническом воздействии. Чувствительными элементами образцов были резисторы типа МЛТ-2 в специальных сборках — они закреплялись на платах по несколько штук и включались в индикаторную электрическую схему. Признаком выхода из строя является усталостное разрушение одного из выводов резистора — при этом фиксируется время от начала нагружения до разрушения  $T_p$ . В опытах определяли зависимость между  $T_p$  и параметрами гармонического возмущения — частотой  $f$  и амплитудой ускорения на столе вибростенда  $a_m$ . Число циклов нагрузки до усталостного разрушения образца  $N = fT_p$ . В табл. 3 приведены результаты обработки данных, соответствующих амплитуде виброускорения  $a_m = 17,5g$ :  $m_T = (T_p)_{cp}$  — математическое ожидание  $T_p$ ;  $\sigma_T^2$  — дисперсия  $T_p$ ;  $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_m}{g}\right)^2 (T_p)_H$  — наивероятнейшее значение энергии разрушения. Значения коэффициента вариации  $\sigma_T/m_T$ , приведенные в табл. 3, близки к значению,

Таблица 3

Результаты обработки данных испытаний на вибропрочность

$f$ , Гц	$m_T$ , с	$\sigma_T^2$ , с <sup>2</sup>	$\sigma_T$ , с	$\sigma_T/m_T$	$(T_p)_{ij}$ , с	$\mathcal{E}$ , с
100	601	$8,29 \cdot 10^4$	289	0,480	481	$7,36 \cdot 10^4$
150	236	$1,495 \cdot 10^4$	122	0,517	189	$2,89 \cdot 10^4$
175	320	$2,94 \cdot 10^4$	171	0,534	256	$3,92 \cdot 10^4$
200	1003	$18,1 \cdot 10^4$	425	0,423	802	$12,2 \cdot 10^4$

которое характерно для закона распределения Рэлея [5]:

$$\frac{\sigma}{m} = \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1} = 0,522.$$

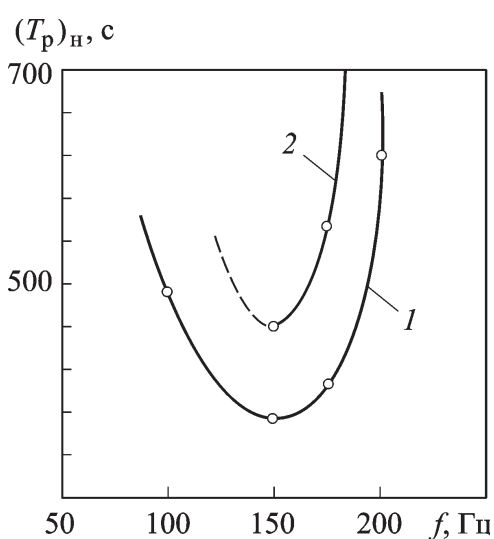
В качестве наивероятнейшего принято значение  $T_p$ , соответствующее максимуму этого закона, т.е.

$$\frac{(T_p)_H}{m_T} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cong 0,8.$$

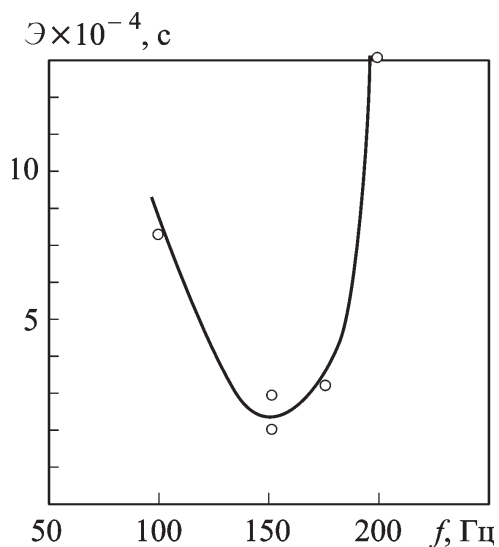
Кривые  $(T_p)_H(f)$  имеют четко выраженный минимум в районе резонансной частоты образца (150 Гц), что наглядно видно на рис. 5. На фиксированной частоте, но при различных виброускорениях значения  $T_p$  значительно различаются (на резонансе примерно в 2 раза). Для проверки приемлемости энергетического подхода указанные кривые были пересчитаны в зависимость  $\mathcal{E}(f)$ . Полученные при этом точки оказались достаточно близкими, что позволило построить единую (усредненную) кривую, показанную на рис. 6. Разброс расчетных точек на частоте 150 Гц составляет  $\pm 17\%$ .

Таким образом, даже на основе этих ограниченных данных можно сделать вывод о том, что энергия воздействия до разрушения, по крайней мере при гармоническом законе, действительно инвариантна на данной частоте и поэтому может быть использована при формировании критерия усталостной прочности. Внешним признаком такой возможности является стягивание кривых  $T_p(f)$  в единую кривую  $\mathcal{E}(f)$ . Этот факт позволяет оценить ожидаемую долговечность при заданном значении действующего ускорения  $a_m$  или по требуемой долговечности найти допустимое значение виброускорения.

Еще бóльшие перспективы могут быть в том случае, если для однотипных по конфигурации образцов нормированные по  $\mathcal{E}_{\min}$  и  $f_0$



**Рис. 5. Время до разрушения:**  
1 —  $a_m = 17,5g$ ; 2 —  $a_m = 10g$



**Рис. 6. Усредненная зависимость  $\mathcal{E}(f)$**

кривые будут либо совпадать, либо несущественно различаться в пределах рабочего диапазона частот. Если построить зависимость  $\mathcal{E}/\mathcal{E}_{\min}$  от  $\lambda = f/f_0$ , то при совпадении нормированных кривых достаточно будет, определив резонансную частоту испытуемого образца, экспериментально оценить длительность воздействия до разрушения на этой частоте. Значение воздействия может быть произвольным (с учетом инвариантности энергии до разрушения), но не должно, очевидно, быть меньше того, которое соответствует пределу выносливости  $\sigma_{-1}$ . Обозначим это значение  $(a_m)_{-1}$  (не исключено, что оно зависит от частоты виброускорения), найдем его, используя выражение для нормированной средней линии Велера, несколько преобразовав его:

$$(a_m)_{-1} = \frac{a_m}{\left(\frac{2 \cdot 10^6}{N}\right)^{1/2}},$$

а также воспользовавшись имеющимися экспериментальными данными. В описанных опытах на резонансной частоте 150 Гц  $(a_m)_{-1}$  оказывается равным 6,4g и 10,3g. Различие можно, по-видимому, объяснить нелинейностью зависимости между амплитудами напряжений на выводах испытуемого образца и действующего ускорения.

Таким образом, на основе энергетического подхода можно интегрально описать свойства воздействия и конструкции, если абстрагироваться от напряженного состояния (учитываемого косвенно). Конкретный вид критериев усталостной прочности зависит от специфических особенностей конструкции и воздействия и может быть научно обоснован лишь при накоплении достаточного объема экспериментальных данных.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С л у ч а й н ы е колебания / Ред. С. Крендалл. – М.: Мир, 1967. – 356 с.
2. О в ч и н н и к о в И. Н., С т е п н е в В. А. О достоверности эквивалентных испытаний на вибрацию // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. – 2010. – № 2. – С. 26–36.
3. Г л а д к и й В. Ф. Прочность, вибрация и надежность летательных аппаратов. – М.: Наука, 1975. – 456 с.
4. И н ж е н е р н ы е методы исследования ударных процессов / Г.С. Батуев, Ю.В. Голубков, А.К. Ефремов и др. 2-е изд. – М.: Машиностроение, 1977. – 240 с.
5. В е н т ц е л ь Е. С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. 3-е изд. – М.: Наука, 1964. – 576 с.
6. П у г а ч е в В. С. Введение в теорию вероятностей. – М.: Наука, 1968. – 368 с.
7. Л и в ш и ц Н. А., П у г а ч е в В. С. Вероятностный анализ систем автоматического управления. Т. 1. – М.: Сов. радио, 1963. – 896 с.
8. Б о л о т и н В. В. Случайные колебания упругих систем – М.: Наука, 1979. – 336 с.



9. К о г а е в В. П. Расчеты при напряжениях, переменных во времени. (Б-ка расчетчика). – М.: Машиностроение, 1977. – 232 с.
10. Г у с е в А. С. Сопротивление усталости и живучесть конструкции при случайных нагрузках. (Б-ка расчетчика). – М. : Машиностроение, 1989 . – 248 с.
11. Ф р и д м а н Я. Б. Механические свойства металлов. 3-е изд. Ч. 2. Механические испытания. Конструктивная прочность. – М.: Машиностроение, 1974.– 368 с.
12. Е ф р е м о в А. К. Оценка структуры спектральной плотности стационарного случайного сигнала // Изв. вузов. Машиностроение. – 1977. – № 11. – С. 34–40.
13. С т а т и с т и ч е с к и е вопросы прочности и динамики машин: Тез. докладов Всесоюзного научно-технического совещания. – 7–9 апреля 1976. – Рига, РПИ.

Статья поступила в редакцию 16.11.2011



Альберт Константинович Ефремов родился в 1933 г., окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана в 1957 г. Канд. техн. наук, доцент кафедры “Автономные информационные и управляющие системы” МГТУ им. Н.Э. Баумана, Почетный работник высшего профессионального образования РФ. Автор около 250 научных работ в области теории проектирования электромеханических систем взрывателей, исследования и воспроизведения динамических воздействий и 17 авторских свидетельств на изобретения.

A.K. Yefremov (b. 1933) graduated from the Bauman Moscow Higher Technical School in 1957. Ph. D. (Eng.), assoc. professor of “Autonomous Information and Control Systems” department of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 250 publications and 17 author’s certificates for invention in the field

of theory of design of electromechanical fuse systems, investigation and reproduction of dynamical actions in tests.

