

УДК 539.377:536.2

А. К. Карышев, М. И. Супельняк

## ТЕРМОЦИКЛИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ЦИЛИНДРЕ, ВЫЗВАННЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ ТЕПЛООБМЕНА С ВНЕШНЕЙ СРЕДОЙ

*Решена задача термоупругости для термоциклических напряжений в цилиндре, вызываемых нестационарными периодическими условиями теплообмена с внешней средой. Приведены результаты расчетов с использованием выведенных зависимостей и ранее найденного квазистационарного температурного поля. Затронут вопрос о поиске решения численными методами, и выполнена оценка влияния термоциклических напряжений на прочность цилиндра.*

**E-mail: : k1kf@bmstu-kaluga.ru; max2901@mail.ru**

**Ключевые слова:** *цилиндр, термоупругость, термоциклические напряжения, нестационарные периодические условия теплообмена, температурные волны, парциальное охлаждение лопаток.*

**Постановка задачи.** Одной из важнейших проблем газотурбостроения является обеспечение требуемого ресурса работы элементов проточной части турбин, работающих при высоких температурах. Как правило, ее решают, применяя различные системы охлаждения, особенно необходимые для рабочих лопаток, являющихся наиболее нагруженными деталями. Отдельно стоит выделить способ наружного парциального охлаждения, предполагающий подачу через одну часть сопловых каналов охлаждающего агента, а через другую – продуктов сгорания топлива. Из-за этого рабочие лопатки при вращении попеременно омываются охладителем и горячим газом, а их температура устанавливается на некотором среднем уровне, что позволяет сделать их конструкцию неохлаждаемой и значительно снизить стоимость.

Для решения вопроса о возможности применения данного типа охлаждения проводились исследования теплоотдачи от профиля лопатки к влажному водяному пару [1], использование которого в качестве охлаждающего агента представляется наиболее целесообразным, термодинамической эффективности цикла [2] и схемной организации проточной части турбины [3]. Не затронутой осталась лишь проблема термоциклических напряжений, способных повлиять на прочность рабочих лопаток. Эти напряжения связаны с температурными волнами, возникающими в лопатках из-за периодической смены во времени направления и величины теплового потока на их поверхностях. Расчет

распределения температуры, необходимого для последующего определения теплонапряженного состояния, возможен только численными методами из-за сложной геометрии детали и сопряженных с газодинамикой граничных условий теплообмена. Поэтому в работе [4] авторы предложили исследовать общие закономерности распространения температурных волн на модели неограниченного цилиндра при нестационарных периодических условиях теплообмена с окружающей средой и получили приближенное аналитическое выражение для его квазистационарного температурного поля. В настоящей статье ставится задача расчета термоциклических напряжений в цилиндре с использованием полученной зависимости при характерных для газовых турбин параметрах.

**Математическая модель.** Строго говоря, процессы теплопроводности и упругого деформирования твердого тела связаны между собой, поскольку при деформировании выделяется или поглощается теплота, которая влияет на распределение температуры. Однако для металлов эффект связанности полей деформации и температуры обычно мал и им можно пренебречь [5, 6]. В таком случае, принимая также во внимание, что рассматривается плоское деформированное состояние, уравнение термоупругости для перемещений имеет вид [5, 6]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{u}{r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \alpha_T \frac{\partial \vartheta}{\partial r}, \quad (1)$$

где  $u = u(r, \tau)$  — радиальное перемещение точки цилиндрической поверхности радиуса  $r$  в момент времени  $\tau$ ;  $\mu$  — коэффициент Пуассона;  $c = \sqrt{(1 - \mu) E / [(1 - 2\mu)(1 + \mu)\rho]}$  — скорость распространения продольных волн в упругой среде материала цилиндра;  $E$  — модуль упругости первого рода;  $\rho$  — плотность материала цилиндра;  $\alpha_T$  — коэффициент линейного температурного расширения;  $\vartheta(r, \tau) = T(r, \tau) - T(r, 0)$  — изменение температуры  $T(r, \tau)$  цилиндра относительно начальной  $T(r, 0)$ .

В общем случае начальное распределение температуры может быть неравномерным, а также могут иметь место начальные деформации и напряжения. Однако при работе материала в области нагрузок, где его поведение описывается уравнениями линейной теории упругости, общее напряженно-деформированное состояние определяется методом суперпозиции соответствующих величин от действия различных факторов. Поэтому в дальнейшем, исходя из поставленных целей, ограничимся рассмотрением нестационарных периодических процессов при условии равномерного начального температурного поля цилиндра  $T(r, 0) = T_0 = \text{const}$ , отсылая интересующихся вопросами стационарных температурных напряжений к литературе по данной тематике, например [7].

Для отыскания конкретного решения (1) задаются граничные и начальные условия. В центре цилиндра, очевидно, должно выполняться условие

$$u(0, \tau) = 0. \quad (2)$$

Поверхность цилиндра радиуса  $R$  контактирует с внешней средой, давление которой  $p(\tau)$  в общей постановке задачи является периодической функцией времени, поэтому второе граничное условие принимает вид

$$\sigma_r(R, \tau) = -p(\tau). \quad (3)$$

Записать уравнение (3) через перемещения можно, используя связь между напряжениями и деформациями [6]:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{(1-2\mu)(1+\mu)} \left[ (1-\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \mu \frac{u}{r} \right] - \frac{E\alpha_T \vartheta}{1-2\mu}, \\ \sigma_\varphi &= \frac{E}{(1-2\mu)(1+\mu)} \left[ (1-\mu) \frac{u}{r} + \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right] - \frac{E\alpha_T \vartheta}{1-2\mu}, \\ \sigma_z &= \frac{\mu E}{(1-2\mu)(1+\mu)} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) - \frac{E\alpha_T \vartheta}{1-2\mu}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$  — радиальные, окружные и осевые напряжения соответственно. С помощью первой формулы (4) получаем (3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} (1-\mu) \frac{\partial u(R, \tau)}{\partial r} + \mu \frac{u(R, \tau)}{R} &= \\ &= (1+\mu) \left[ \alpha_T \vartheta(R, \tau) - (1-2\mu) \frac{p(\tau)}{E} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Как было отмечено ранее, необходимо также задать начальные распределения перемещений и скоростей перемещений:

$$u(r, 0) = u_0(r), \quad \frac{\partial u(r, 0)}{\partial \tau} = \dot{u}_0(r). \quad (6)$$

Решение начально-краевой задачи (1), (2), (5) и (6) состоит из двух частей. Первая представляет собой интересующую нас периодическую функцию, являющуюся частным решением неоднородного уравнения (1), которая удовлетворяет граничным условиям и не зависит от начальных. Вторая — соответствует решению задачи при однородных уравнении (1) и краевом условии (5), удовлетворяет условию (2) и совместно с частным решением — начальным условиям. Последняя функция, являющаяся аperiodической, не затухает с течением времени, поскольку (1) не учитывает демпфирования. Она может быть представлена по времени в виде ряда из гармоник, не имеющих об-

щего периода, в чем легко убедиться, получив общее решение задачи операционным методом [5]. В нашем случае влияние аperiodической составляющей малó и она не принимается во внимание.

В работе [4] было получено квазистационарное решение уравнения теплопроводности в виде ряда Фурье:

$$T(r, \tau) = \bar{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \tilde{A}_n^T(r) \cos(n\omega\tau) + \tilde{B}_n^T(r) \sin(n\omega\tau) \right],$$

$$\tilde{A}_n^T(r) = A_n^T \operatorname{ber} \left( \sqrt{\frac{n}{\operatorname{Fo}^*}} \frac{r}{R} \right) + B_n^T \operatorname{bei} \left( \sqrt{\frac{n}{\operatorname{Fo}^*}} \frac{r}{R} \right),$$

$$\tilde{B}_n^T(r) = -A_n^T \operatorname{bei} \left( \sqrt{\frac{n}{\operatorname{Fo}^*}} \frac{r}{R} \right) + B_n^T \operatorname{ber} \left( \sqrt{\frac{n}{\operatorname{Fo}^*}} \frac{r}{R} \right),$$

где  $\bar{T}$  — среднее значение температуры цилиндра за период изменения параметров среды  $\tau_{\Delta}$ ;  $\omega = 2\pi/\tau_{\Delta}$  — круговая частота;  $\operatorname{Fo}^*$  — критерий Фурье;  $A_n^T, B_n^T$  — определяемые из граничного условия на поверхности цилиндра постоянные коэффициенты, которые при нестационарном периодическом коэффициенте теплоотдачи могут быть приближенно найдены до любого конечного номера  $n = k$ ;  $\operatorname{ber}(x), \operatorname{bei}(x)$  — функции Кельвина. Применяв тот же подход, представим все периодические величины в виде рядов:

$$p(\tau) = \bar{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n^p \cos(n\omega\tau) + B_n^p \sin(n\omega\tau) \right]; \quad (7)$$

$$\vartheta(r, \tau) = \bar{\vartheta} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \tilde{A}_n^T(r) \cos(n\omega\tau) + \tilde{B}_n^T(r) \sin(n\omega\tau) \right]; \quad (8)$$

$$u(r, \tau) = \tilde{A}_0^u(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \tilde{A}_n^u(r) \cos(n\omega\tau) + \tilde{B}_n^u(r) \sin(n\omega\tau) \right], \quad (9)$$

где  $\bar{p}$  — среднее значение давления за период  $\tau_{\Delta}$ ;  $A_n^p, B_n^p$  — коэффициенты соответствующего ряда;  $\bar{\vartheta} = \bar{T} - T_0$ ;  $\tilde{A}_0^u(r), \tilde{A}_n^u(r), \tilde{B}_n^u(r)$  — подлежащие определению функциональные зависимости коэффициентов в разложении перемещения и напряжений. Подставив (7), (8), (9) в (1), (2), (5) и сгруппировав члены при соответствующих гармониках, получим краевые задачи для коэффициентов:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\tilde{A}_0^u}{dr} \right) - \frac{\tilde{A}_0^u}{r^2} = 0, \quad (10)$$

$$(1 - \mu) \frac{d\tilde{A}_0^u(R)}{dr} + \mu \frac{\tilde{A}_0^u(R)}{R} = (1 + \mu) \left[ \alpha_T \bar{\vartheta} - (1 - 2\mu) \frac{\bar{p}}{E} \right];$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\tilde{A}_n^u}{dr} \right) - \left( \frac{1}{r^2} - \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \right) \tilde{A}_n^u = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \alpha_T \frac{d\tilde{A}_n^T}{dr},$$

$$\tilde{A}_n^u(0) = 0,$$

$$(1 - \mu) \frac{d\tilde{A}_n^u(R)}{dr} + \mu \frac{\tilde{A}_n^u(R)}{R} =$$

$$= (1 + \mu) \left[ \alpha_T \tilde{A}_n^T(R) - (1 - 2\mu) \frac{A_n^p}{E} \right];$$
(11)

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\tilde{B}_n^u}{dr} \right) - \left( \frac{1}{r^2} - \frac{n^2 \omega^2}{c^2} \right) \tilde{B}_n^u = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \alpha_T \frac{d\tilde{B}_n^T}{dr},$$

$$\tilde{B}_n^u(0) = 0,$$

$$(1 - \mu) \frac{d\tilde{B}_n^u(R)}{dr} + \mu \frac{\tilde{B}_n^u(R)}{R} =$$

$$= (1 + \mu) \left[ \alpha_T \tilde{B}_n^T(R) - (1 - 2\mu) \frac{B_n^p}{E} \right],$$
(12)

где

$$\frac{d\tilde{A}_n^T}{dr} = \frac{A_n^T}{R} \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \text{ber}' \left( \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R} \right) + \frac{B_n^T}{R} \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \text{bei}' \left( \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R} \right),$$

$$\frac{d\tilde{B}_n^T}{dr} = -\frac{A_n^T}{R} \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \text{bei}' \left( \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R} \right) + \frac{B_n^T}{R} \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \text{ber}' \left( \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R} \right),$$

$$\text{ber}'(x) = \frac{d \text{ber}(x)}{dx}, \quad \text{bei}'(x) = \frac{d \text{bei}(x)}{dx}.$$

Легко получить решение задачи (10), которое имеет вид

$$\tilde{A}_0^u(r) = (1 + \mu) \left[ \alpha_T \bar{\vartheta} - (1 - 2\mu) \bar{p}/E \right] r. \quad (13)$$

Решения неоднородных дифференциальных уравнений в задачах (11) и (12) ищем в виде сумм общих решений соответствующих им однородных уравнений [8]

$$\left\{ \tilde{A}_n^u \right\} (r) = A_n^u J_1 \left( \frac{n\omega}{c} r \right) + C_n^u Y_1 \left( \frac{n\omega}{c} r \right),$$

$$\left\{ \tilde{B}_n^u \right\} (r) = B_n^u J_1 \left( \frac{n\omega}{c} r \right) + D_n^u Y_1 \left( \frac{n\omega}{c} r \right)$$

и их частных решений, которые могут быть найдены в виде

$$\left\langle \tilde{A}_n^u \right\rangle (r) = \phi_n^u \text{ber}' \left( \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R} \right) + \chi_n^u \text{bei}' \left( \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R} \right),$$

$$\left\langle \tilde{B}_n^u \right\rangle (r) = -\phi_n^u \text{bei}' \left( \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R} \right) + \chi_n^u \text{ber}' \left( \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R} \right).$$

Здесь  $J_1(x)$ ,  $Y_1(x)$  — функции Бесселя первого порядка 1-го и 2-го рода соответственно. Значения коэффициентов  $\phi_n^u$  и  $\chi_n^u$  определяются из решения системы двух алгебраических уравнений, получаемой подстановкой одного из частных решений в соответствующее ему дифференциальное уравнение и последующими упрощениями с использованием свойств бесселевых функций [9]:

$$\phi_n^u = \frac{1 + \mu \alpha_T}{1 - \mu \frac{\alpha_T}{R}} \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{(n\omega/c)^2 A_n^T - [n/(\text{Fo}^* R^2)] B_n^T}{(n\omega/c)^4 + n^2/(\text{Fo}^* R^2)^2},$$

$$\chi_n^u = \frac{1 + \mu \alpha_T}{1 - \mu \frac{\alpha_T}{R}} \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{(n\omega/c)^2 B_n^T + [n/(\text{Fo}^* R^2)] A_n^T}{(n\omega/c)^4 + n^2/(\text{Fo}^* R^2)^2}.$$

Поскольку из граничных условий задачи (11) и (12) в центре цилиндра очевидно, что  $C_n^u = D_n^u = 0$ , то после суммирования общих и частных решений получаем

$$\tilde{A}_n^u(r) = A_n^u J_1\left(\frac{n\omega}{c}r\right) + \phi_n^u \text{ber}'\left(\sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R}\right) + \chi_n^u \text{bei}'\left(\sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R}\right), \quad (14)$$

$$\tilde{B}_n^u(r) = B_n^u J_1\left(\frac{n\omega}{c}r\right) - \phi_n^u \text{bei}'\left(\sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R}\right) + \chi_n^u \text{ber}'\left(\sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R}\right). \quad (15)$$

Значения коэффициентов  $A_n^u$  и  $B_n^u$  определяются из граничных условий задач (11) и (12) на поверхности цилиндра:

$$A_n^u = \frac{(1+\mu) \left[ \alpha_T \tilde{A}_n^T(R) - (1-2\mu) \frac{A_n^p}{E} \right] - (1-\mu) \langle \tilde{A}_n^u \rangle'(R) - \mu \frac{\langle \tilde{A}_n^u \rangle(R)}{R}}{(1-\mu) \frac{n\omega}{c} J_0\left(\frac{n\omega R}{c}\right) - \frac{1-2\mu}{R} J_1\left(\frac{n\omega R}{c}\right)},$$

$$B_n^u = \frac{(1+\mu) \left[ \alpha_T \tilde{B}_n^T(R) - (1-2\mu) \frac{B_n^p}{E} \right] - (1-\mu) \langle \tilde{B}_n^u \rangle'(R) - \mu \frac{\langle \tilde{B}_n^u \rangle(R)}{R}}{(1-\mu) \frac{n\omega}{c} J_0\left(\frac{n\omega R}{c}\right) - \frac{1-2\mu}{R} J_1\left(\frac{n\omega R}{c}\right)},$$

где

$$\begin{aligned} \langle \tilde{A}_n^u \rangle'(r) &= \frac{d \langle \tilde{A}_n^u \rangle}{dr} = \\ &= \frac{\phi_n^u}{R} \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \text{ber}''\left(\sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R}\right) + \frac{\chi_n^u}{R} \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \text{bei}''\left(\sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R}\right), \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \langle \tilde{B}_n^u \rangle' (r) &= \frac{d \langle \tilde{B}_n^u \rangle}{dr} = \\ &= -\frac{\phi_n^u}{R} \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \text{bei}'' \left( \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R} \right) + \frac{\chi_n^u}{R} \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \text{ber}'' \left( \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R} \right), \\ \text{ber}''(x) &= \frac{d^2 \text{ber}(x)}{dx^2}, \quad \text{bei}''(x) = \frac{d^2 \text{bei}(x)}{dx^2}. \end{aligned}$$

Теперь легко найти напряжения с помощью формул (4).

Поскольку уравнение (1) содержит инерционный член, то полученное решение учитывает динамические эффекты. Однако из-за того, что в металлах скорость распространения продольных волн достаточно велика и изменения температуры обычно происходят медленно, на практике часто пренебрегают инерционным членом и ищут решение задачи в квазистатической постановке [6]. В этом случае перемещения будут описываться уравнением, получаемым из (1) при  $c \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{u}{r^2} = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \alpha_T \frac{\partial \vartheta}{\partial r}.$$

Не повторяя рассуждений, отметим лишь те отличия, которые появятся в найденных выражениях:

$$\tilde{A}_n^u(r) = \hat{A}_n^u r + \phi_n^u \text{ber}' \left( \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R} \right) + \chi_n^u \text{bei}' \left( \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R} \right),$$

$$\tilde{B}_n^u(r) = \hat{B}_n^u r - \phi_n^u \text{bei}' \left( \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R} \right) + \chi_n^u \text{ber}' \left( \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R} \right),$$

$$\phi_n^u = -\frac{1 + \mu}{1 - \mu} \alpha_T R \sqrt{\frac{\text{Fo}^*}{n}} B_n^T, \quad \chi_n^u = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \alpha_T R \sqrt{\frac{\text{Fo}^*}{n}} A_n^T,$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_n^u &= (1 + \mu) \left[ \alpha_T \tilde{A}_n^T(R) - (1 - 2\mu) \frac{A_n^p}{E} \right] - \\ &\quad - (1 - \mu) \langle \tilde{A}_n^u \rangle' (R) - \mu \frac{\langle \tilde{A}_n^u \rangle (R)}{R}, \end{aligned}$$

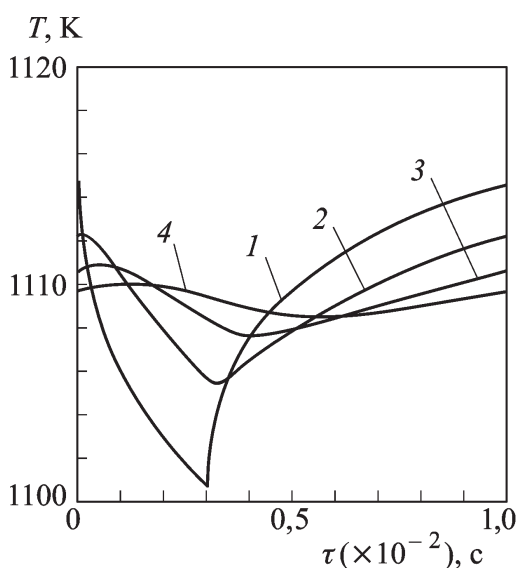
$$\begin{aligned} \hat{B}_n^u &= (1 + \mu) \left[ \alpha_T \tilde{B}_n^T(R) - (1 - 2\mu) \frac{B_n^p}{E} \right] - \\ &\quad - (1 - \mu) \langle \tilde{B}_n^u \rangle' (R) - \mu \frac{\langle \tilde{B}_n^u \rangle (R)}{R}, \end{aligned}$$

$$\frac{d\tilde{A}_n^u}{dr} = \hat{A}_n^u + \frac{\phi_n^u}{R} \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \text{ber}'' \left( \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R} \right) + \frac{\chi_n^u}{R} \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \text{bei}'' \left( \sqrt{\frac{n}{\text{Fo}^*}} \frac{r}{R} \right),$$

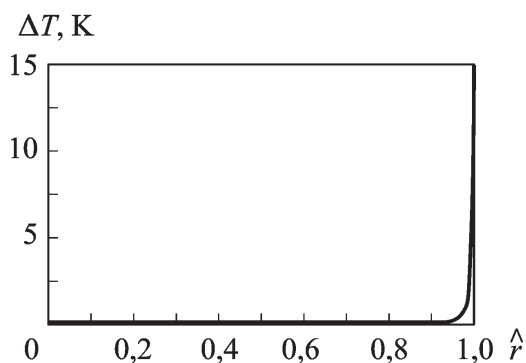
$$\frac{d\tilde{B}_n^u}{dr} = \hat{B}_n^u - \frac{\phi_n^u}{R} \sqrt{\frac{n}{Fo^*}} \text{bei}'' \left( \sqrt{\frac{n}{Fo^*}} \frac{r}{R} \right) + \frac{\chi_n^u}{R} \sqrt{\frac{n}{Fo^*}} \text{ber}'' \left( \sqrt{\frac{n}{Fo^*}} \frac{r}{R} \right).$$

**Результаты расчетов и их обсуждение.** В работе [4] было рассчитано квазистационарное температурное поле неограниченного цилиндра  $R = 15$  мм из жаропрочного сплава ХН80ТБЮ при характерных для газовых турбин параметрах теплообмена, соответствующее частоте вращения ротора  $1/\tau_{\Delta} = 100$  Гц. Цилиндр находился в среде, температура которой 30 % времени периода составляла  $T_{\Pi} = 500$  К, а оставшееся время —  $T_{\Gamma} = 1500$  К, причем смена температур происходила скачкообразно. Этим температурам соответствовали коэффициенты теплоотдачи  $\alpha_{\Pi} = 3000$  Вт/(м<sup>2</sup>·К) и  $\alpha_{\Gamma} = 2000$  Вт/(м<sup>2</sup>·К). На рис. 1 и 2 приведены зависимости температуры цилиндра от времени за один период на нескольких радиусах и зависимость размаха температурных колебаний  $\Delta T$  от безразмерного радиуса  $\hat{r} = r/R$ .

Для полученного температурного поля были проведены расчеты вызываемых им термоциклических перемещений и напряжений при физических и механических свойствах материала цилиндра [10, 11]  $\rho = 8250$  кг/м<sup>3</sup>;  $\alpha_T = 1,75 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup>;  $E = 1,68 \cdot 10^5$  МПа;  $\mu = 0,3$ ;  $c = 5235,7$  м/с. При этом поверхность цилиндра полагалась свободной —  $p(\tau) = 0$ , а  $T_0 = \bar{T}$ , т.е.  $\tilde{A}_0^u = \tilde{A}_0^{\sigma_r} = \tilde{A}_0^{\sigma_{\varphi}} = \tilde{A}_0^{\sigma_z} = 0$ . На рис. 3, 5, 7, 9 приведены зависимости от времени перемещений и напряжений за один период на нескольких радиусах, а на рис. 4, 6, 8, 10 зависимости размахов их колебаний от безразмерного радиуса. Отметим, что поля перемещений и радиальных напряжений имеют изломы во времени в моменты смены знака теплового потока на поверхности цилиндра одновременно на всех радиусах, в то время как у окружных и осевых напряжений изломы наблюдаются только на внешнем радиусе. Кроме

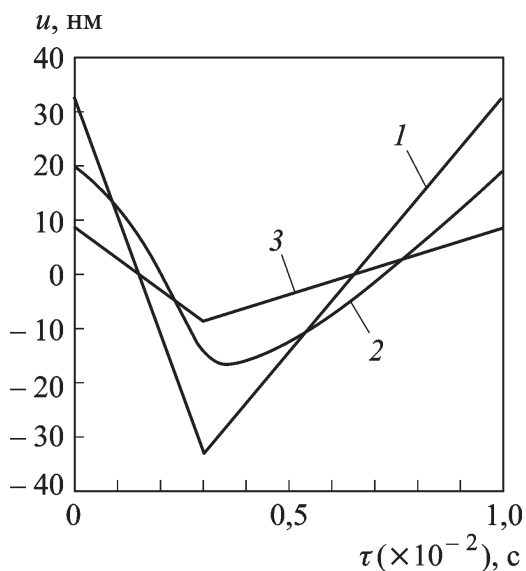


**Рис. 1.** Зависимость температуры цилиндра от времени на радиусах: 1 — 0,015 м; 2 — 0,0149 м; 3 — 0,0148 м; 4 — 0,0147 м

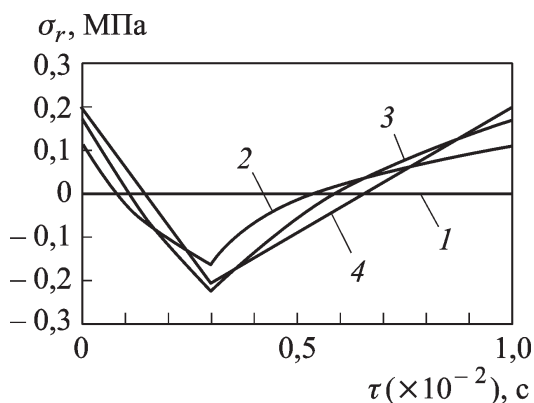


**Рис. 2.** Зависимость размаха колебаний температуры цилиндра от безразмерного радиуса

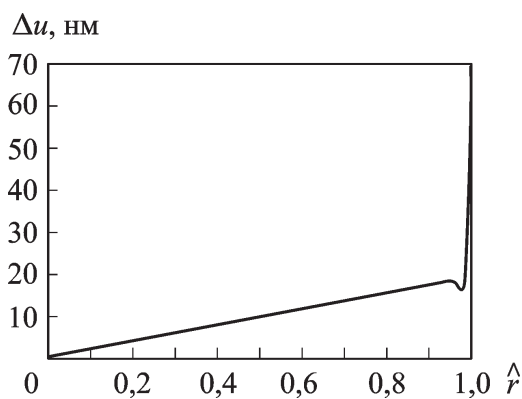




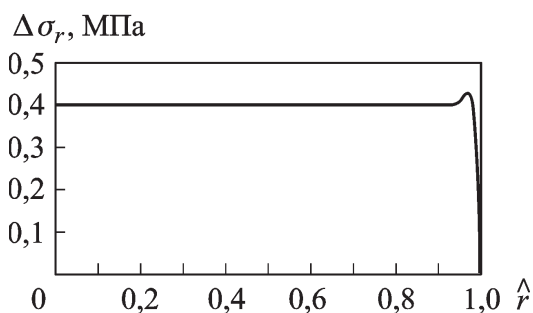
**Рис. 3. Зависимость радиальных перемещений от времени на радиусах:**  
 1 — 0,015 м; 2 — 0,0149 м; 3 — 0,014 м



**Рис. 5. Зависимость радиальных напряжений от времени на радиусах:**  
 1 — 0,015 м; 2 — 0,0149 м; 3 — 0,0148 м; 4 — 0,014 м



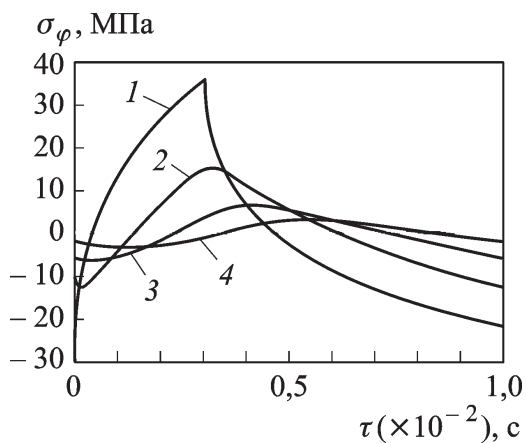
**Рис. 4. Зависимость размаха колебаний радиальных перемещений от безразмерного радиуса**



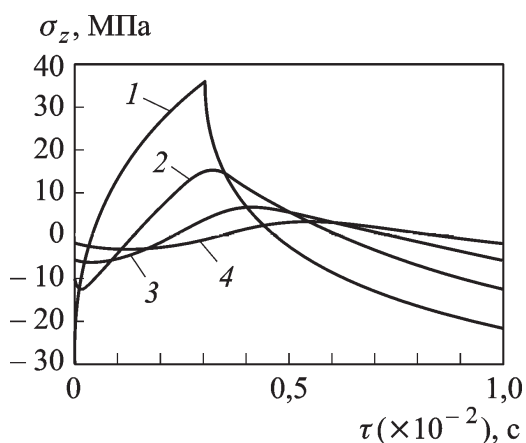
**Рис. 6. Зависимость размаха колебаний радиальных напряжений от безразмерного радиуса**

того, зависимости размахов колебаний перемещений и напряжений от радиуса не являются монотонными, что наиболее отчетливо видно из рис. 4 и 6 (на остальных рисунках это незаметно из-за масштаба изображения). При отсутствии давления среды радиальные напряжения довольно малы и основное влияние на прочность оказывают окружные и осевые напряжения, размах колебаний которых на поверхности составляет порядка 60 МПа. В то же время, что наглядно демонстрируют рис. 7–10, эти напряжения довольно близки между собой.

Результаты расчетов показали, что для рассмотренного случая квазистатическое и динамическое решения дают практически идентичные результаты, тем самым подтверждая гипотезу о малом влиянии инерционного члена в уравнении (1). Этот факт является важным при использовании численных методов, поскольку решение гиперболического уравнения (1) сопряжено с определенными трудностями. Как



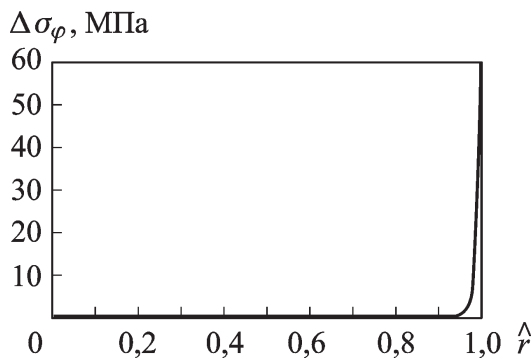
**Рис. 7.** Зависимость окружных напряжений от времени на радиусах (1–4 — см. рис. 1)



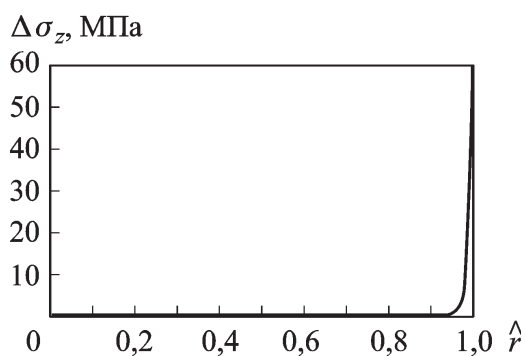
**Рис. 9.** Зависимость осевых напряжений от времени на радиусах (1–4 — см. рис. 1)

отмечалось ранее, решение задачи имеет незатухающую апериодическую составляющую, поэтому при численной реализации определить периодическую часть методом установления с использованием алгоритма прогонки на каждом шаге по времени не представляется возможным. Кроме того, дополнительные проблемы вызывает тот факт, что сама периодическая функция не является гладкой. Поэтому переход к квазистатической постановке задачи позволяет эффективно применять хорошо отработанные подходы теории разностных схем. Поступив подобным образом, авторы провели решение задачи методом конечных разностей, предварительно определив температурное поле интегроинтерполяционным методом [12]. Результаты расчетов с высокой степенью точности совпали с аналитическим решением, тем самым подтвердив целесообразность использования квазистатических уравнений при численном решении задач термоупругости в областях со сложной геометрией, не поддающихся аналитическому исследованию.

В настоящее время еще не выработаны общие критерии прочности и рекомендации методов расчета на термоусталость, которая относится к разновидности малоциклового низкочастотной усталости, хотя в



**Рис. 8.** Зависимость размаха колебаний окружных напряжений от безразмерного радиуса



**Рис. 10.** Зависимость размаха колебаний осевых напряжений от безразмерного радиуса

этой области и проводился ряд исследований [13]. Что же касается многоциклового высокочастотной термической усталости, к которой относится наш случай, то данный вопрос остается значительно менее исследованным, поэтому для однозначного ответа о прочности цилиндра при конкретном термоциклическом нагружении необходимо проведение эксперимента. Однако для ее оценки при отсутствии опытных данных вполне допустимо использование механических критериев прочности [13, 14]. Поскольку в тензоре напряжений отличны от нуля только компоненты  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_z$ , стоящие на главной диагонали, то они являются главными напряжениями. Для сложного напряженно-го состояния определим размах колебаний эквивалентного напряжения по теории удельной потенциальной энергии формоизменения [15]:

$$\Delta\sigma_{\text{ЭКВ}}(\hat{r}) = \sqrt{\frac{(\Delta\sigma_r - \Delta\sigma_\varphi)^2 + (\Delta\sigma_\varphi - \Delta\sigma_z)^2 + (\Delta\sigma_z - \Delta\sigma_r)^2}{2}}.$$

Наибольшее значение эта величина принимает на поверхности цилиндра, где  $\Delta\sigma_{\text{ЭКВ}}(1) \approx 60$  МПа. Если ввести условную амплитуду цикла напряжения, равную  $\Delta\sigma_{\text{ЭКВ}}/2$ , то без учета эффективного коэффициента концентрации напряжений и при нулевом значении среднего напряжения за период можно найти коэффициент запаса усталостной прочности [15]:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\Delta\sigma_{\text{ЭКВ}}(1)/2} = \frac{370}{30} = 12,3 \gg 1,$$

где  $\sigma_{-1} = 370$  МПа — предел выносливости сплава ХН80ТБЮ при симметричном цикле нагружения [11]. Таким образом, можно ожидать, что термоциклические напряжения не окажут влияния на прочность цилиндра.

**Выводы.** Получены аналитические выражения для расчета термоциклического напряженно-деформированного состояния цилиндра при известном квазистационарном температурном поле. Расчеты с использованием найденных зависимостей показали, что использование квазистатических уравнений не оказывает заметного влияния на конечный результат решения, но значительно упрощает процесс численного расчета. Сделана оценка, показавшая, что термоусталостная прочность цилиндра не обеспечивается для характерных материалов и параметров теплообмена газовых турбин.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зысина - Моложен Л. М., Зысин Л. В., Поляк М. П. Теплообмен в турбомашинах. – Л.: Машиностроение, 1974. – 336 с.
2. Зысин В. А. Комбинированные парогазовые установки и циклы. – Л.: Госэнергоиздат, 1962. – 187 с.

3. Зысина Л. В. Высокотемпературные турбины с парциальными подводами газа и пара // Труды ЛПИ. – 1964. – № 232. – С. 20–25.
4. Карышев А. К., Супельняк М. И. Температурное поле цилиндра при нестационарных периодических условиях теплообмена с окружающей средой // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. – 2011. – № 4. – С. 54–70.
5. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высш. шк., 2001. – 550 с.
6. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. – М.: Физматгиз, 1963. – 252 с.
7. Мелан Э., Паркус Г. Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. – М.: Физматгиз, 1958. – 167 с.
8. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
9. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. I. – М.: ИЛ, 1949. – 799 с.
10. Чиркин В. С. Теплофизические свойства материалов ядерной техники. – М.: Атомиздат, 1968. – 484 с.
11. Масленков С. Б. Жаропрочные стали и сплавы: Справочник. – М.: Металлургия, 1983. – 192 с.
12. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
13. Дульнев Р. А., Котов П. И. Термическая усталость металлов. – М.: Машиностроение, 1980. – 200 с.
14. Костюк А. Г. Динамика и прочность турбомашин: Учебник для вузов. – М.: Издательский дом МЭИ, 2007. – 476 с.
15. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наук. думка, 1988. – 736 с.

Статья поступила в редакцию 26.09.2011



Анатолий Константинович Карышев родился в 1940 г., окончил в 1969 г. Московский энергетический институт. Канд. техн. наук, профессор кафедры “Тепловые двигатели и теплофизика” Калужского филиала МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор более 90 научных работ в области теплофизики.

A.K. Karyshev (b. 1940) graduated from the Moscow Power Engineering Institute in 1969. Ph. D. (Eng.), professor of “Heat Engines and Thermal Physics” department of the Kaluga Branch of the Bauman Moscow State Technical University. Author of more than 90 publications in the field of thermal physics.



Максим Игоревич Супельняк родился в 1988 г., аспирант кафедры “Тепловые двигатели и теплофизика” Калужского филиала МГТУ им. Н.Э. Баумана. Автор 11 научных работ в области теплофизики.

M.I. Supel'nyak (b. 1988) — postgraduate of the Kaluga Branch of the Bauman Moscow State Technical University. Author of 11 publications in the field of thermal physics.